VI Olimpiada Matemática de Centroamerica y el Caribe

Managua, Nicaragua

8 de Junio de 2004

Primer Día

Problema 1

En una pizarra se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Dos jugadores A y B juegan por turnos. Cada jugador en su turno escoge uno de los números que quedan en la pizarra y lo borra, junto con todos sus múltiplos (si los hay). El jugador que borra el último número pierde. A juega primero.

Determinar si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cuál es esa estrategia.

`Nota:` Un jugador tiene una estrategia ganadora si puede garantizar su victoria, sin importar como juegue su rival.

Problema 2

Se define una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ de la siguiente manera: $a_0 = a_1 = 1$ y para $k \geq 2$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + 1$.

Determinar cuántos enteros entre 1 y 2004 se pueden expresar de la forma $a_m + a_n$ con m y n enteros positivos y $m \neq n$.

Problema 3

Sea ABC un triángulo. Sean E y F puntos en los segmentos BC y CA respectivamente, tales que $\frac{CE}{CB} + \frac{CF}{CA} = 1$ y $\angle CEF = \angle CAB$. Sean M el punto medio del segmento EF y G el punto de corte de la recta CM con el segmento AB. Demostrar que el triángulo FEG es semejante al triángulo ABC.

Duración de la prueba: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.