VI Olimpiada Matemática de Centroamerica y el Caribe

Managua, Nicaragua

9 de Junio de 2004

Segundo Día

Problema 4
Se tiene un tablero cuadriculado de 10×10 casillas. La mitad de sus casillas se pintan de blanco, y la otra mitad de negro. Un lado común a dos casillas en el tablero se llama *lado frontera* si estas dos casillas tienen colores diferentes. Determinar el mínimo y el máximo número de lados frontera que puede haber en el tablero. Justificar las respuestas.

Problema 5
Sea $ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $AB+CD = AD$. Sea P el punto sobre AD tal que $AP = AB$ y $PD = CD$.

a) Demostrar que la medida de $\angle BPC = 90°$.

b) Sea Q el punto medio de BC y R el punto de corte de la recta AD y la circunferencia que pasa por los puntos B, A y Q. Demostrar que los puntos B, P, R y C están sobre una misma circunferencia.

Problema 6
Con perlas de diversos colores se forman collares.
Se dice que un collar es *primo* si no puede descomponerse en cadenas de perlas de la misma longitud, e iguales entre si.
Sean n y q enteros positivos. Demostrar que el número de collares primos con n perlas, cada una de las cuales tiene uno de q^n colores posibles, es igual a n veces el número de collares primos con n^2 perlas, cada una de las cuales tiene uno de q colores posibles.
`Nota:` Dos collares se consideran iguales si tienen el mismo número de perlas, y se puede obtener la misma coloración en ambos collares, rotando uno de ellos hasta hacerlo coincidir con el otro.

Duración de la prueba: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.