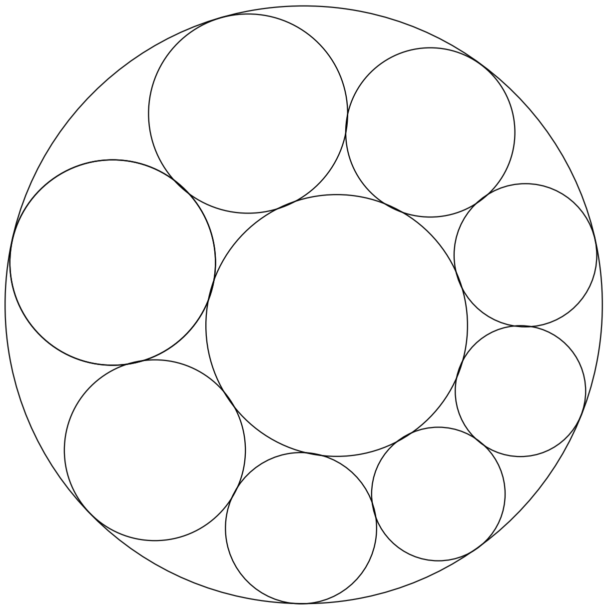


Inversión en Olimpiadas

Aplicación de la Inversión a la Resolución de Problemas

Francisco J. García Capitán

http://garciacapitan.auna.com

Contenido

1. Definición de inversión

1.1. Introducción

Para efectuar cálculos con números grandes (por ejemplo en Astronomía) cuando no había calculadoras se usaban los logaritmos.

En efecto los logaritmos transforman los productos en sumas y las potencias en productos. Si tenemos que multiplicar dos números muy grandes, hallamos sus logaritmos, efectuamos la suma de dichos logaritmos y averiguamos a qué número corresponde ese logaritmo.

De esta manera lo que hemos hecho es transformar el problema en otro más sencillo, resolverlo, y aplicar la transformación inversa a la solución, obteniendo la solución del problema original.

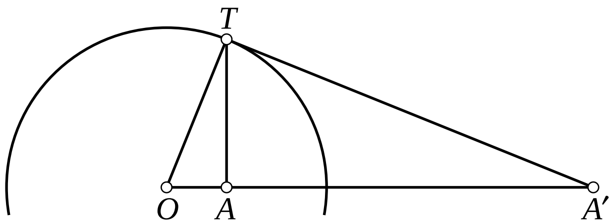
Otro ejemplo sencillo de este mismo esquema es el que usamos mentalmente para calcular el $\mathrm{MCD}(60, 90)$. Dividimos los dos números por 10, hallamos el $\mathrm{MCD}(6, 9) = 3$ y multiplicamos por 10, resultando $\mathrm{MCD}(60, 90) = 30$.

La inversión, que presentamos aquí, es una transformación que se aplica a figuras del plano o del espacio (aquí nos limitaremos al plano).

1.2. Definición de inversión

Dada una circunferencia de centro O y radio k, la inversión de centro O y radio k es una transformación del plano que a cada punto A distinto de O, le asocia otro punto A' de la semirrecta OA cumpliendo la relación $OA \cdot OA' = k^2$.

La figura siguiente muestra la manera de construir el punto inverso A' del punto A cuando éste es interior a la circunferencia.



La perpendicular a la semirrecta OA determina el punto T en la circunferencia. Por este punto trazamos una tangente que corta a la semirrecta OA en el punto A', inverso de A. En efecto, los triángulos OTA y $OA'T$ son semejantes. Entonces,

$$\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA'} \Rightarrow OA \cdot OA' = OT^2 = k^2.$$

Usando el mismo dibujo, si el punto A' está fuera de la circunferencia, trazamos una tangente a la circunferencia desde A' y, siendo T el punto de tangencia, por

T trazamos una perpendicular a la recta OA' que cortará a ésta en el punto A, simétrico del punto A'.

Vemos entonces que un punto exterior a la circunferencia se transforma en un punto interior y un punto exterior a la circunferencia se transforma en un punto interior. Los puntos de la circunferencia de inversión se invierten en sí mismos, es decir, son puntos fijos de la transformación.

Es conveniente observar que hay exactamente un punto del plano, el centro de inversión O, que se queda sin imagen por la transformación. Cuando se trabaja con inversión se supone que a todos los puntos del plano se le añade un "punto ideal"o "punto del infinito"con lo que obtenemos el *plano inversivo*. Dicho punto ideal será la imagen del centro de inversión.

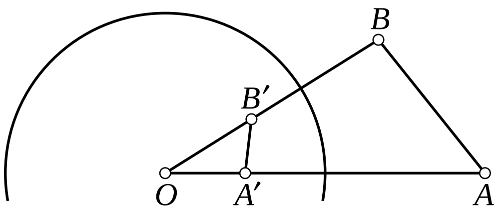
2. Propiedades de la inversión

Las propiedades de la inversión nos permiten hacer demostraciones geométricas que no son sencillas cuando se intentan con otros métodos.

2.1. La inversión y las distancias

¿Como se transforman las distancias con una inversión? Sean A y B puntos distintos y sean A' y B' los inversos respecto de una circunferencia de centro O y radio k. Entonces

$$A'B' = \frac{AB \cdot k^2}{OA \cdot OB}.$$



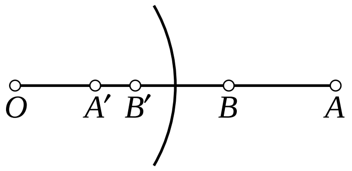
En el caso, mostrado en la figura, en que la recta AB no pase por O, si tenemos en cuenta que $OA \cdot OA' = k^2 = OB \cdot OB'$, obtenemos

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'},$$

por lo que los triángulos OAB y $OB'A'$ son semejantes. Entonces,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OA} = \frac{k^2}{OA \cdot OB} \Rightarrow A'B' = \frac{AB \cdot k^2}{OA \cdot OB}.$$

En el caso de que los puntos O, A y B estén alineados, A' y B' estarán en la misma recta:



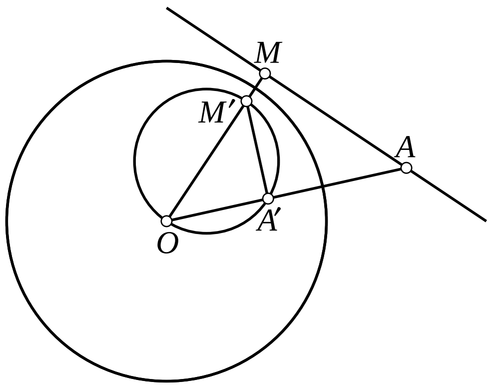
Entonces tendremos:

$$A'B' = OB' - OA' = \frac{k^2}{OA} - \frac{k^2}{OB} = \frac{k^2}{OA \cdot OB}(OB - OA) = \frac{AB \cdot k^2}{OA \cdot OB}.$$

2.2. La inversión y las rectas

Es evidente que cualquier recta que pase por el centro de inversión se va a transformar en sí misma.

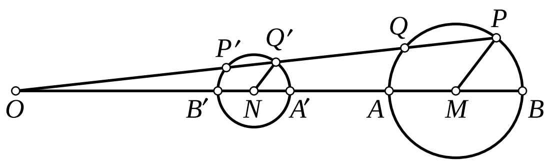
Por otro lado, si la recta l no pasa por el centro de inversión O, dicha recta se transforma en una circunferencia con diámetro OM', siendo M la proyección ortogonal de O sobre l y M' el inverso de M.



En efecto, si consideremos un punto cualquiera A de la recta l y su recíproco A', los triángulos $OA'M'$ y OMA son semejantes, y como el ángulo AMM' es recto, también lo es el ángulo $OA'M'$, resultando entonces que A' está en la circunferencia con diámetro OM'.

2.3. La inversión y las circunferencias

La figura anterior nos sirve para averiguar cuál es el resultado de invertir una circunferencia que pasa por el centro de inversión: si OM' es un diámetro, entonces esa circunferencia se transforma en la recta perpendicular a OM' por el punto M, inverso de M'.
Vamos a hallar ahora el resultado de invertir una circunferencia que no pasa por el centro de inversión.



Supongamos que una circunferencia dada tiene radio r y sean P y Q los puntos de intersección de una recta que pasa por O y dicha circunferencia. Llamemos P' y Q' a los puntos inversos de P y Q.

Por la definición de inversión, $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = k^2$ y por un teorema elemental de la circunferencia,$OP \cdot OQ = |OM^2 - r^2|$. Dividiendo estas igualdades obtenemos

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OQ'}{OP} = \frac{k^2}{|OM^2 - r^2|} = \text{cte.}$$

Trazamos una paralela a PM por Q' y llamamos N a su intersección con OM. Los triángulos $OQ'N$ y OPM son semejantes, por tener dos lados paralelos. Por tanto,

$$\frac{OQ'}{OP} = \frac{Q'N}{PM} = \frac{NO}{MO}.$$

Despejando,

$$NO = MO \cdot \frac{OQ'}{OP} = \frac{MO \cdot k^2}{|OM^2 - r^2|} = \text{cte.}$$

$$Q'N = PM \cdot \frac{OQ'}{OP} = \frac{r \cdot k^2}{|OM^2 - r^2|} = \text{cte.}$$

En este razonamiento pueden intercambiarse los puntos P y Q, para concluir que los puntos P' y Q' estarán en una circunferencia de radio N y radio constante siempre que P y Q estén en la circunferencia de centro M y radio r.

Los cálculos anteriores, además nos dan el radio r' de una circunferencia inversa de una circunferencia con centro M y radio r que no pasa por el centro de inversión:

$$r' = \frac{r \cdot k^2}{|OM^2 - r^2|}. \tag{1}$$

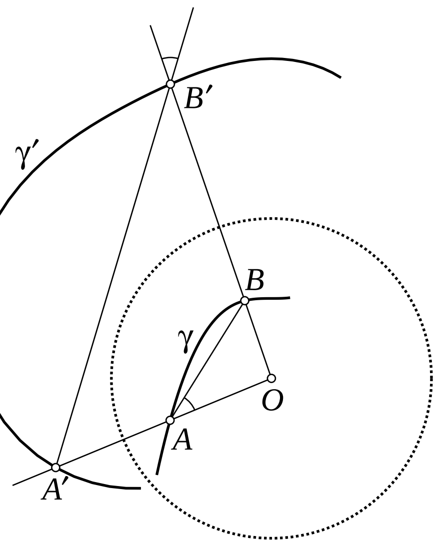
Para construir la circunferencia inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión, unimos el centro de inversión con el centro de la circunferencia dada mediante una recta que determina en ésta un diámetro AB. Hallamos los inversos A' y B' de A y B. La circunferencia construida con diámetro $A'B'$ es el resultado de aplicar la inversión a la circunferencia dada.

2.4. La inversión y los ángulos

Una de las propiedades más útiles de la inversión es que la inversión conserva los ángulos.

El ángulo de intersección de dos curvas en un punto de intersección se define como el ángulo formado por las rectas tangentes (cuando estas tangentes existen). Esto se aplica a rectas, circunferencias o a cualquier otra curva.

En primer lugar, veamos que la inversión conserva el ángulo entre una curva y una recta que pase por el centro de inversión y el punto de tangencia.



En la figura, γ es una curva, A y B son puntos sobre γ, y γ', A' y B' son los correspondientes inversos. Como los triángulos AOB y $B'OA'$ son semejantes, los ángulos marcados en la figura son iguales.

Ahora, suponiendo que B es un punto móvil sobre la curva y que B se va aproximando a A, las rectas AB y $A'B$' tienden a las tangentes en A y A' a las curvas γ y γ'. Uno de los ángulos marcados tiende al ángulo entre γ y OA, mientras que el otro tiende al ángulo inverso.

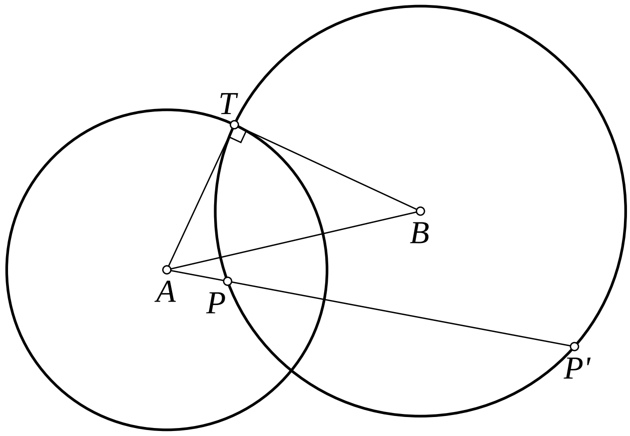
¿Qué ocurre con el ángulo formado por dos curvas? Basta considerar otra curva cortando a γ en A y aplicarle lo mismo. El ángulo formado por las dos curvas se obtendrá sumando los ángulos de cada una de ellas con la recta OA.

3. Circunferencias ortogonales

Las circunferencias ortogonales están íntimamente relacionadas con la inversión, por lo que dedicamos una sección a ellas.

3.1. Circunferencias ortogonales

Dos circunferencias secantes son ortogonales cuando se cortan formando ángulo recto, es decir cuando sus tangentes (o los radios) en uno de los puntos de intersección son perpendiculares. Así, las circunferencias con centros A y B de la figura son perpendiculares, ya que $\angle BTA = 90°$:



Si r y s son los radios de las circunferencias (A) y (B), la condición de ortogonalidad equivale a que $AB^2 = r^2 + s^2$.

3.2. Ortogonalidad e inversión

Si seguimos suponiendo que las circunferencias (A) y (B) son ortogonales, y si P y P' son dos puntos de intersección de una recta que pasa por A con la circunferencia (B), la potencia del punto A respecto de la circunferencia (B) es $AP \cdot AP' = AT^2 = r^2$, por lo que P' es el punto inverso de (P) respecto de la inversión definida por la circunferencia (A), es decir,

> *Una inversión deja fija una circunferencia ortogonal a la circunferencia de inversión.*

Recíprocamente, si una circunferencia (B) contiene a un punto P y a su inverso P' respecto de la circunferencia (A) tendremos $r^2 = AP \cdot AP' = AB - s^2$, por lo que las circunferencias serán ortogonales.

4. Problemas propuestos

1. Dados un punto y dos dos circunferencias, trazar una circunferencia que pase por el punto y que sea tangente a las dos circunferencias.

2. (Rusia, 1995). Sean una semicircunferencia con diámetro AB y centro O, y una recta que corta a la semicircunferencia en los puntos C y D, y a la recta AB en el punto M (siendo $MD < MC$ y $MB < MA$). Sea K el segundo punto de intersección de las circunferencias OAC y OBD. Demostrar que $\angle MKO = 90°$.

3. (España, 2005). Diremos que un triángulo es multiplicativo si el producto de las longitudes de dos de sus lados es igual a la longitud del tercer lado. Sea $ABC \ldots XYZ$ un polígono regular de n lados con todos sus lados de longitud 1. Las $n - 3$ diagonales que salen del vértice A dividen al triángulo ZAB en $n - 2$ triángulos más pequeños. Probar que cada uno de esos triángulos es multiplicativo.

4. (Porismo de Steiner). Consideremos dos circunferencias, no concéntricas y una interior a la otra. Comenzamos por inscribir una circunferencia entre ambas, y luego vamos inscribiendo circunferencias tangentes a las dos dadas y a la última. Llegará un momento en que la circunferencia que inscribimos se solape con la primera, o bien que sea tangente a ella. Demostrar que ello no depende de la posición de la primera circunferencia inscrita.

5. (Rumanía, 1997). Sea un triángulo ABC y un punto D sobre BC. Dos circunferencias son tangentes exteriormente a AD en el mismo punto M y cada una de ellas es tangente a la circunferencia circunscrita de ABC y al lado BC, la primera sobre el segmento BD y la otra sobre el segmento DC. Demostrar que AD es la bisectriz del ángulo A.

6. (Praxis der Mathematik, prob. 546). Dado un triángulo ABC y su circunferencia circunscrita γ, sea κ la κ la circunferencia tangente a γ en A y tangente a BC en un punto F. Sea E el otro punto de intersección de κ con el lado CA (aparte de A). Se pide: *a*) Demostrar que la recta AF es la bisectriz del ángulo CAB. *b*) Si U y V son los dos puntos de γ que cumplen $CF = CU = CV$, demostrar que UV es tangente a la circunferencia κ en el punto E.

7. (Irán, 2004). Sea ABC un triángulo. Sea un punto X del interior del triángulo y sea Y la intersección de AX y BC. Tracemos las perpendiculares YP, YQ, YR, YS a las rectas CA, CX, BX, BA respectivamente. Hallar la condición necesaria y suficiente que debe cumplir X para que $PQRS$ sea un cuadrilátero cíclico.

8. Sean ABC un triángulo y D, E, F los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Demostrar que la inversión respecto de la circunferencia inscrita transforma la circunferencia circunscrita a ABC en la circunferencia de los nueve puntos de DEF.

9. (Euler) Si R y r son los radios de las circunferencias circunscritas e inscritas a un triángulo y O e I son su circuncentro e incentro, entonces $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

10. (Competición Matemática Mediterránea, 2005). k y k' son dos circunferencias concéntricas, de centro O y radios respectivos R y R'. Se supone que $R < R'$. Una semirrecta Ox corta a k en el punto A; la semirrecta opuesta Ox' corta a k' en el punto B. Una tercera semirrecta Ot, distinta de las anteriores, corta a k en E y a k' en F. Demostrar que las cuatro circunferencias siguientes se cortan en un mismo punto:

    a) La circunscrita al triángulo OAE.
    b) La circunscrita al triángulo OBF.
    c) La de diámetro EF.
    d) Y la de diámetro AB

11. (Teorema de las Siete Circunferencias). Supongamos que las circunferencias Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, Γ_5, Γ_6 son tangentes a una circunferencia Γ en los puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 respectivamente, y cada una de ellas es también tangentes a la anterior y a la siguiente (entendemos que Γ_1 es la siguiente de Γ_6 y que Γ_6 es la anterior a Γ_1). Entonces, las rectas A_1A_4, A_2A_5 y A_3A_6 son concurrentes.

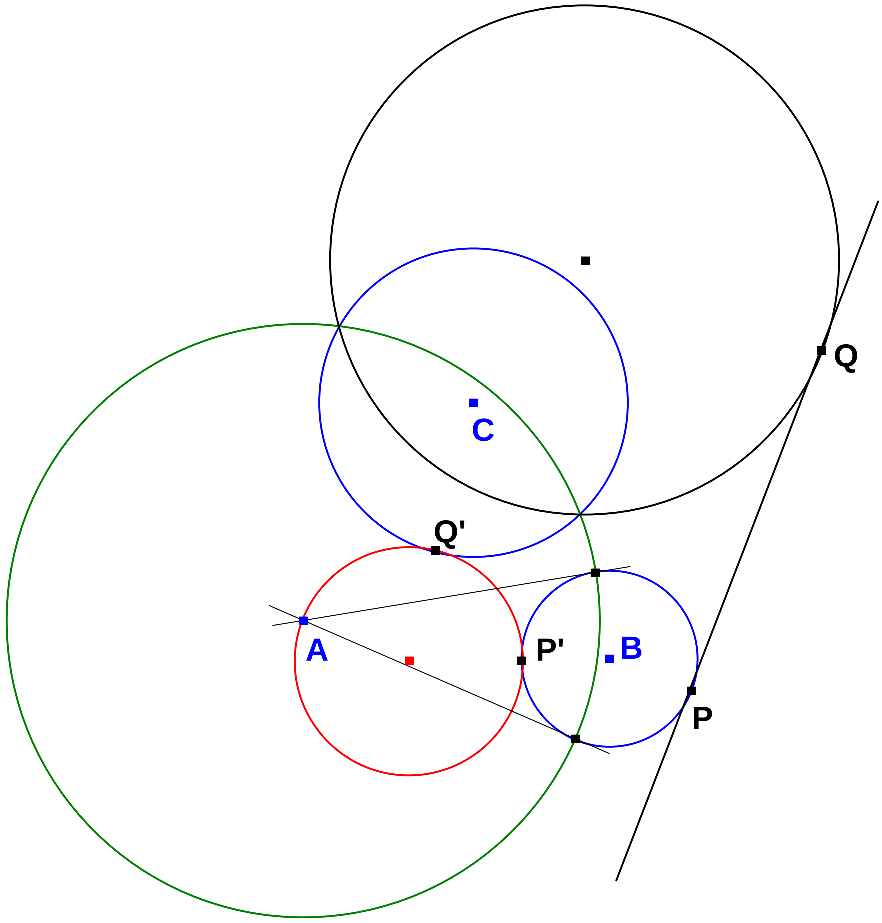
5. Soluciones a los problemas propuestos

Para resolver un problema de inversión debemos elegir adecuadamente el centro y el radio de inversión. A veces, el radio de inversión puede ser cualquiera.

Suele ser conveniente elegir como centro de inversión un punto de tangencia de dos circunferencias, ya que éstas se convertirán en dos rectas paralelas.

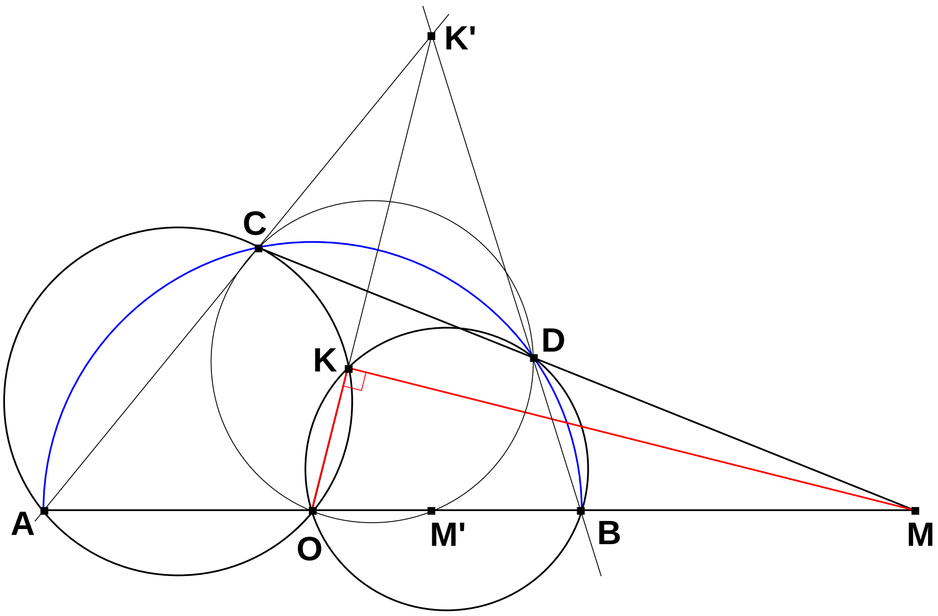
Como en otras áreas, es la práctica la que realmente nos enseña a abordar el problema.

Problema 1. *Dados un punto y dos dos circunferencias, trazar una circunferencia que pase por el punto y que sea tangente a las dos circunferencias.*



Solución. En la figura A es el punto dado y las circunferencias dadas tienen centros B y C. Consideramos como circunferencia de inversión la que está centrada en A y es ortogonal a (B). De esa manera (B) será fija. Hallamos la circunferencia inversa de (C) y una tangente común a dicha circunferencia inversa y a la circunferencia (B). Bastará invertir la recta obtenida para hallar la circunferencia buscada.

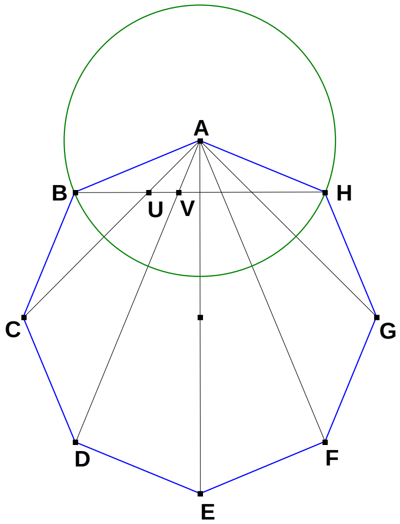
Problema 2. *(Rusia, 1995). Sean una semicircunferencia con diámetro AB y centro O, y una recta que corta a la semicircunferencia en los puntos C y D, y a la recta AB en el punto M (siendo $MD < MC$ y $MB < MA$). Sea K el segundo punto de intersección de las circunferencias OAC y OBD. Demostrar que $\angle MKO = 90°$.*



Solución. Consideramos la inversión de centro A y radio OA. La recta AB es fija. Las circunferencias OAC y OBD se transforman en las rectas AC y BD, que se cortan en K', punto inverso de K. La recta CD se transforma en una circunferencia que pasa por C, D, O, y esta circunferencia corta a la recta AB en el punto M', inverso de M.
Como AD y BC son perpendiculares a BK' y AK' respectivamente y además O es el punto medio de AB, la circunferencia CDO es la circunferencia de los nueve puntos del triángulo $AK'B$, así que también $K'M'$ es perpendicular a AB, es decir $\angle K'M'O = 90°$. En consecuencia, también es $\angle MKO = 90°$.

Problema 3. *(España, 2005). Diremos que un triángulo es multiplicativo si el producto de las longitudes de dos de sus lados es igual a la longitud del tercer lado. Sea $ABC\dots XYZ$ un polígono regular de n lados con todos sus lados de longitud 1. Las $n-3$ diagonales que salen del vértice A dividen al triángulo ZAB en $n-2$ triángulos más pequeños. Probar que cada uno de esos triángulos es multiplicativo.*

Solución. En la figura de la derecha hemos representado el caso de un octógono $ABCDEFGH$, pero el razonamiento es válido para cualquier polígono.



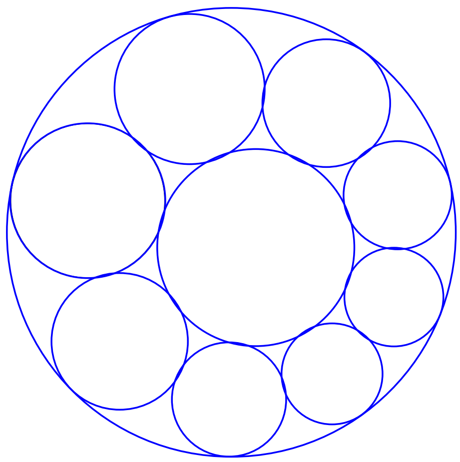
Consideremos una inversión con centro A y radio de inversión $r = 1$. La circunferencia circunscrita al polígono pasa por el centro de inversión, por lo que su imagen es una recta, la recta BH que pasa por los puntos de intersección de ambas.

Consideremos los triángulos AUV y ACD, y apliquemos la fórmula que relaciona las longitudes de segmentos transformados por una inversión,

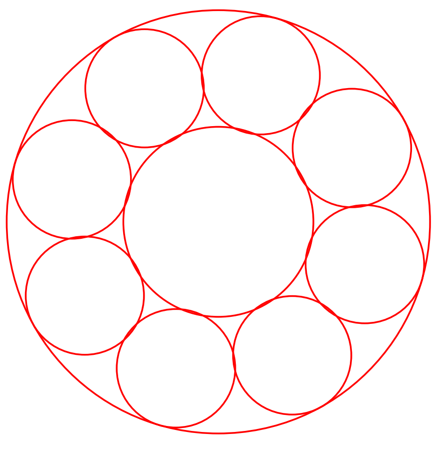
$$1 = CD = UV \cdot \frac{r^2}{AU \cdot AV} = \frac{UV}{AU \cdot AV}.$$

Entonces, $UV = AU \cdot AV$ y el triángulo AUV es multiplicativo.

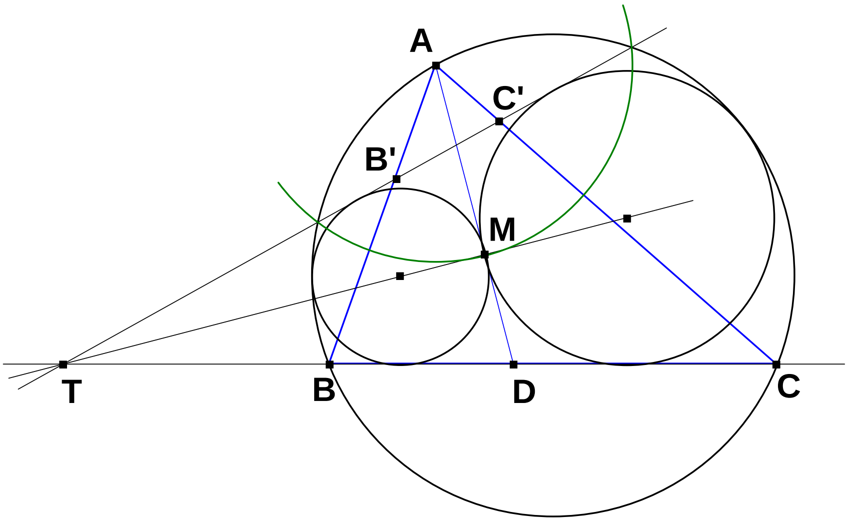
Problema 4. *(Porismo de Steiner). Consideremos dos circunferencias, no concéntricas y una interior a la otra. Comenzamos por inscribir una circunferencia entre ambas, y luego vamos inscribiendo circunferencias tangentes a las dos dadas y a la última. Llegará un momento en que la circunferencia que inscribimos se solape con la primera, o bien que sea tangente a ella. Demostrar que ello no depende de la posición de la primera circunferencia inscrita.*



Solución. El problema se resuelve de forma trivial si las circunferencias dadas son concéntricas. Por tanto, basta considerar una inversión que transforme las dos circunferencias dadas en dos circunferencias concéntricas.

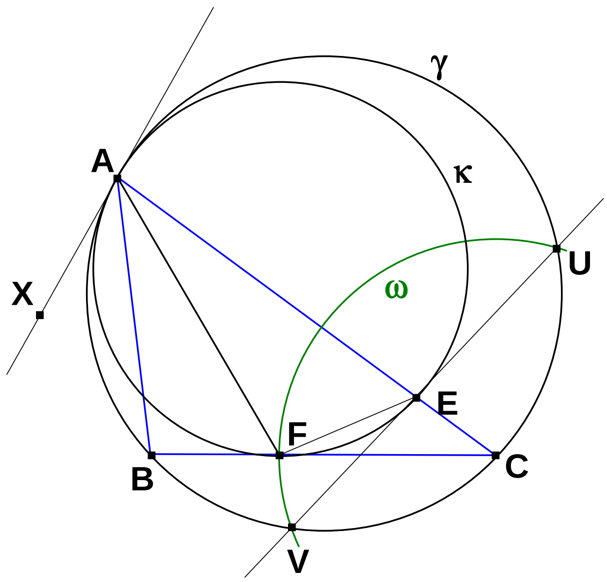


Problema 5. *(Rumanía, 1997). Sea un triángulo ABC y un punto D sobre BC. Dos circunferencias son tangentes exteriormente a AD en el mismo punto M y cada una de ellas es tangente a la circunferencia circunscrita de ABC y al lado BC, la primera sobre el segmento BD y la otra sobre el segmento DC. Demostrar que AD es la bisectriz del ángulo A.*



Solución. Supongamos que la recta que une los centros de las dos circunferencias corta a la recta BC en T. Consideremos la inversión de centro A y radio AM. Esta inversión deja fijas a las dos circunferencias y transforma la circunferencia circunscrita a ABC en la otra tangente común a las dos circunferencias. El cuadrilátero $BCC'B'$ formado por los vértices B y C y sus inversos es cíclico, y un cálculo sencillo de ángulos conduce a que las bisectrices de $\angle BTB'$ y $\angle BAC$ son perpendiculares. Pero por otro lado, TM es la bisectriz de BTB' y $AM \perp TM$. Esto implica que AM debe ser la bisectriz del ángulo A, que es lo que queríamos demostrar.

Problema 6. *(Praxis der Mathematik, prob. 546). Dado un triángulo ABC y su circunferencia circunscrita γ, sea κ la circunferencia tangente a γ en A y tangente a BC en un punto F. Sea E el otro punto de intersección de κ con el lado CA (aparte de A). Se pide: a) Demostrar que la recta AF es la bisectriz del ángulo CAB. b) Si U y V son los dos puntos de γ que cumplen $CF = CU = CV$, demostrar que UV es tangente la circunferencia κ en el punto E.*

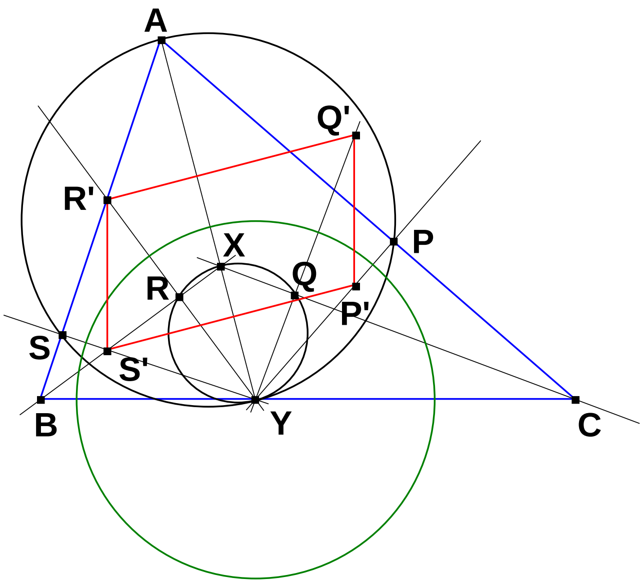


Solución. Para la parte a), calculemos ángulos. Sea X un punto de la tangente a la circunferencia circunscrita por A, de manera que la recta AB separe a C y X. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\angle BAF =& \angle XAF - \angle XAB = \angle AEF - \angle ACB = \\ =& \angle AEF - \angle ECF = \angle EFC = \angle FAE = \angle FAC.\end{aligned}$$

Por tanto, $\angle BAF = \angle CAF$. Para demostrar b), consideremos la inversión respecto de la circunferencia ω con centro C y radio CF. Las circunferencias ω y κ son ortogonales, por lo que κ es fija. Por otro lado, la recta UV es inversa de de γ. El punto A' inverso de A debe ser el punto de tangencia de la recta UV y la circunferencia κ, y además debe estar en la recta AC, por ser C el centro de inversión y A, A' dos puntos inversos, así que debe ser $A' = E$ y UV es tangente a κ en E.

Problema 7. *(Irán, 2004). Sea ABC un triángulo. Sea un punto X del interior del triángulo y sea Y la intersección de AX y BC. Tracemos las perpendiculares YP, YQ, YR, YS a las rectas CA, CX, BX, BA respectivamente. Hallar la condición necesaria y suficiente que debe cumplir X para que $PQRS$ sea un cuadrilátero cíclico.*

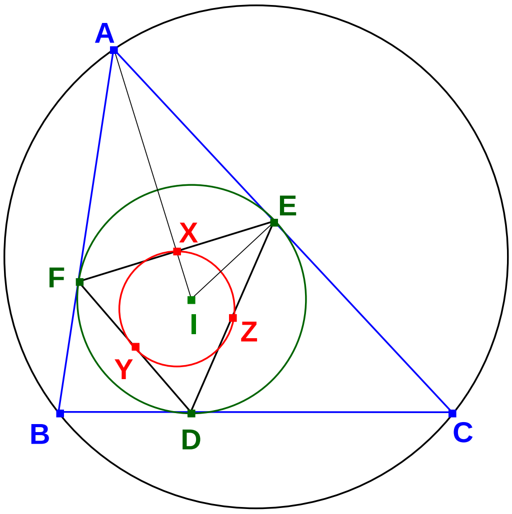


Solución. Consideremos una inversión con centro Y y radio cualquiera. Observemos que la circunferencia con diámetro BY contiene a los puntos R y S, y esta circunferencia se transformará en la recta $R'S'$, perpendicular a BC. De forma análoga, la circunferencia con diámetro YC contiene a los puntos P y Q, y la recta PQ y dicha circunferencia se transforma en la recta $P'Q'$, perpendicular a BC. Asimismo, las circunferencias YRQ e YPS se invierten en dos rectas paralelas, perpendiculares las dos a la recta AY. Deducimos por tanto que $P'Q'R'S'$ es un paralelogramo.

Ahora, el cuadrilátero $PQRS$ será cíclico si y solo si $P'Q'R'S'$ lo es, y al ser un paralelogramo, esto ocurrirá si y sólo si $P'Q'R'S'$ es un rectángulo, es decir, cuando AX sea perpendicular a BC.

Como conclusión, $PQRS$ es un cuadrilátero cíclico si y solo si AX y BC son perpendiculares.

Problema 8. *Sean ABC un triángulo y D, E, F los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Demostrar que la inversión respecto de la circunferencia inscrita transforma la circunferencia circunscrita a ABC en la circunferencia de los nueve puntos de DEF.*



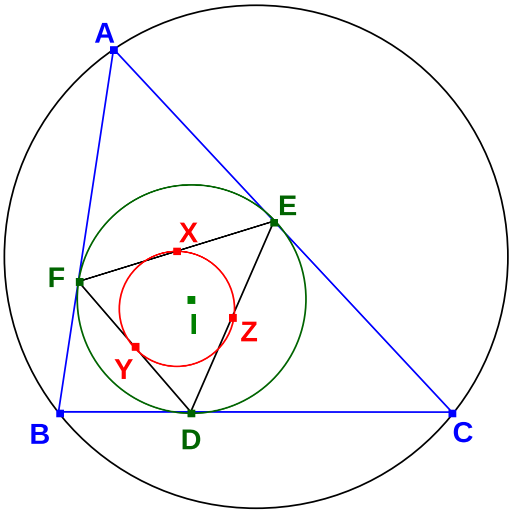
Solución. Sea I y r el centro y el radio de la circunferencia inscrita a ABC. Consideremos la inversión respecto de esta circunferencia. Sean X, Y, Z los puntos medios de los lados DE, EF, FD del triángulo DEF. Por ser E y F los puntos de tangencia de las rectas tangentes desde A a la circunferencia inscrita, ambos puntos son simétricos respecto de la bisectriz AI. De otro modo, el triángulo AEF es isósceles y la perpendicular a EF por A pasa por su punto medio X, es decir $\angle IXE = 90°$. También es $\angle IEA = 90°$, resultando evidente que los triángulos IEA e IXE son semejantes. Entonces tenemos

$$\frac{IX}{IE} = \frac{IE}{IA} \Rightarrow IX \cdot IA = IE^2 = r^2.$$

Esto quiere decir que A y X son puntos inversos. De la misma forma se comprueba que B e Y, C y Z también lo son.

Deducimos entonces que la circunferencia ABC se transforma en la circunferencia XYZ,

Problema 9. *(Euler) Si R y r son los radios de las circunferencias circunscritas e inscritas a un triángulo y O e I son su circuncentro e incentro, entonces $OI^2 = R^2 - 2Rr$.*



Solución. Consideremos la inversión con centro I y radio r. La circunferencia inscrita es fija, y la circunferencia circunscrita (con radio R) se transforma en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo DEF, siendo D, E, F los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados AB, BC, CA del triángulo ABC. El radio de esta circunferencia es $\frac{r}{2}$.

Sabemos que el resultado de una inversión de centro P y radio k sobre una circunferencia $\mathcal{C}$ equivale al de una homotecia centrada en P con razón igual al cociente entre k^2 y la potencia de P respecto de $\mathcal{C}$. Considerando como $\mathcal{C}$ a la circunferencia circunscrita a ABC y nuestra inversión de centro I y radio r, tendremos

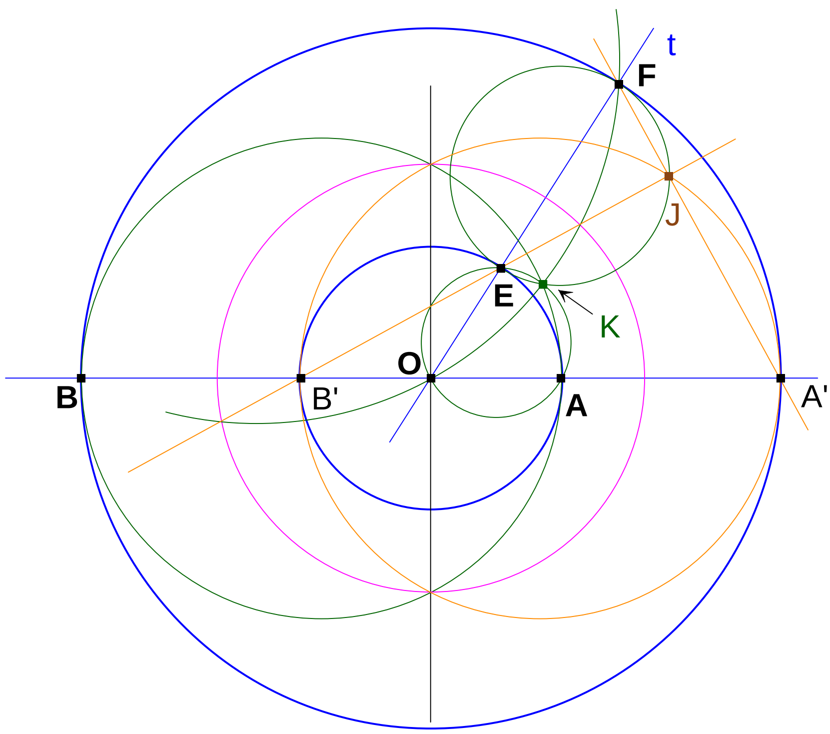
$$\frac{\frac{r}{2}}{R} = \frac{r^2}{R^2 - OI^2},$$

de donde deducimos $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Problema 10. *(Competición Matemática Mediterránea, 2005). k y k' son dos circunferencias concéntricas, de centro O y radios respectivos R y R'. Se supone que $R < R'$. Una semirrecta Ox corta a k en el punto A; la semirrecta opuesta Ox' corta a k' en el punto B. Una tercera semirrecta Ot, distinta de las anteriores, corta a k en E y a k' en F. Demostrar que las cuatro circunferencias siguientes se cortan en un mismo punto:*

1. *La circunscrita al triángulo OAE.*
2. *La circunscrita al triángulo OBF.*
3. *La de diámetro EF.*
4. *Y la de diámetro AB*

Solución: Consideramos la inversión de centro O, de radio $\sqrt{RR'}$ que transforma las circunferencias concéntricas una en otra. E y F resultan ser puntos inversos. Sean A' y B' los inversos de A y B respectivamente. A' estará en k' y B' estará en k:



Entonces:

1. Las circunferencias OAE y OBF pasan por el centro de inversión, así que se transforman en rectas, OAE se transforma en la recta $A'F$ y OBF se transforma en la recta $B'E$.

2. La circunferencia con diámetro EF es fija.

3. La circunferencia con diámetro AB se transforma en la circunferencia con diámetro $A'B'$.

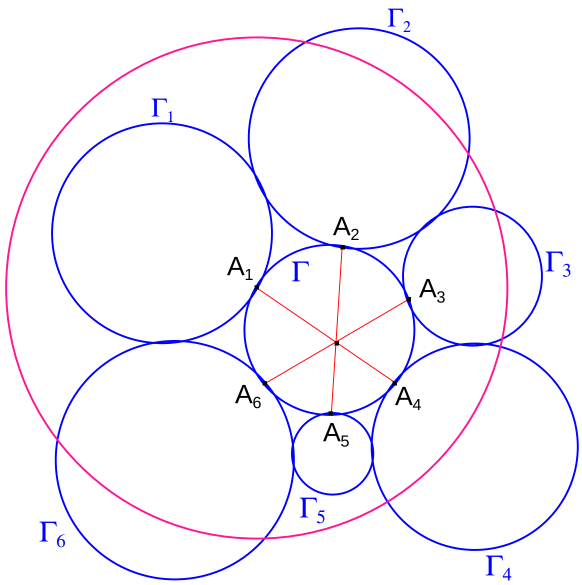
Por ser inversos E y F, A y A', los triángulos OEA y OFA' son semejantes, e isósceles, así que $A'F$ es paralela a AE. Como AE forma con $B'E$ un ángulo recto, por estar E en la circunferencia con diámetro $B'A$, la recta $A'F$ que hemos dicho que paralela a AE también formará ángulo recto con $B'E$. El punto de intersección J de $A'F$ y $B'E$ estará por tanto en la circunferencia con diámetro $B'A'$.

El ángulo EJF, opuesto a $A'JB'$ también será recto y por tanto, J también estará en la circunferencia con diámetro EF.

Entonces, el punto J es común a: la circunferencia con diámetro EF; la circunferencia con diámetro $A'B'$; la recta $A'F$; y la recta $B'E$.

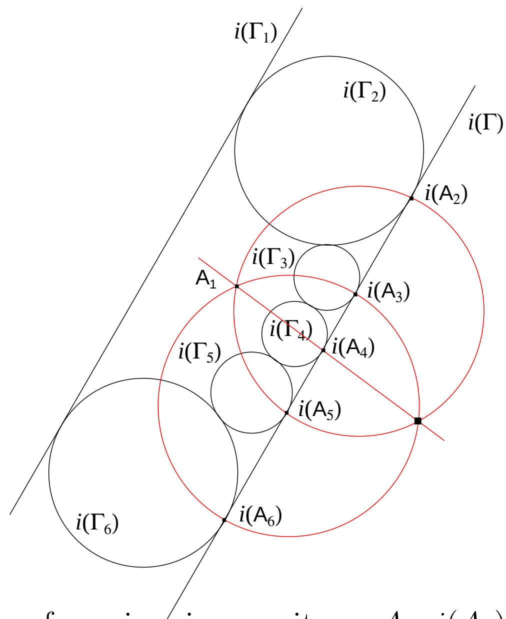
En consecuencia, el punto K, inverso K será común a: la circunferencia EF; la circunferencia con diámetro AB, la recta BF; y la recta BF, que es lo que queríamos demostrar.

Problema 11. *(Teorema de las Siete Circunferencias). Supongamos que las circunferencias Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, Γ_5, Γ_6 son tangentes a una circunferencia Γ en los puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 respectivamente, y cada una de ellas es también tangentes a la anterior y a la siguiente (entendemos que Γ_1 es la siguiente de Γ_6 y que Γ_6 es la anterior a Γ_1). Entonces, las rectas A_1A_4, A_2A_5 y A_3A_6 son concurrentes.*



Solución. Llamemos i a la inversión respecto de una circunferencia con centro A_1.

Las circunferencias Γ_1 y Γ, que pasan por A_1, se transforman en dos rectas paralelas, y las circunferencias Γ_2 y Γ_6, que son tangentes tanto a Γ_1 como Γ se transformarán en dos circunferencias con el mismo radio.



Ahora tenemos que a) La recta A_1A_4 es fija. b) La recta A_2A_5 se transforma en la circunferencia circunscrita a A_1, $i(A_2)$ e $i(A_5)$. c b) La recta A_3A_6 se transforma en la circunferencia circunscrita a A_1, $i(A_3)$ e $i(A_6)$.

Que las tres rectas A_1A_4, A_2A_5 y A_3A_6 son concurrentes equivale entonces a que sus trasformados tengan algún punto común además de A_1. Esto ocurrirá si la recta A_1A_4 sea el eje radical de las circunferencias circunscritas a A_1, $i(A_2)$ e

$i(A_5)$ y a A_1, $i(A_3)$ e $i(A_6)$. Para comprobarlo, veremos que el punto $i(A_4)$, que pertenece a la recta A_1A_4, tiene la misma potencia respecto de las dos circunferencias, es decir, veremos que

$$i(A_4)i(A_2) \cdot i(A_4)i(A_5) = i(A_4)i(A_3) \cdot i(A_4)i(A_6).$$

Usaremos que el segmento de tangente común a dos circunferencias tangentes con radios r_1 y r_2 es $2\sqrt{r_1r_2}$, que se obtiene fácilmente usando el teorema de Pitágoras.

Llamando r_i al radio de Γ_i, tenemos

$$\begin{aligned} i(A_4)i(A_2) \cdot i(A_4)i(A_5) &= -\left(2\sqrt{r_3r_4} + 2\sqrt{r_2r_3}\right) \cdot 2\sqrt{r_4r_5} = \\ &= -\,4\sqrt{r_2r_3r_4r_5} - 4r_4\sqrt{r_3r_5}, \\ i(A_4)i(A_3) \cdot i(A_4)i(A_6) &= -\,2\sqrt{r_4r_3} \cdot \left(2\sqrt{r_4r_5} + 2\sqrt{r_5r_6}\right) = \\ &= -\,4r_4\sqrt{r_3r_5} - \sqrt{r_3r_4r_5r_6}. \end{aligned}$$

y usando que $r_2 = r_6$ vemos que las dos potencias son iguales.

6. Glosario

Ángulo inscrito. Un ángulo se llama inscrito si tiene su vértice en la circunferencia y los lados secantes a la circunferencia. El ángulo semiinscrito tiene uno de los lados secante y el otro tangente y puede considerarse como un caso límite del ángulo inscrito. Un ángulo inscrito o semiinscrito mide la mitad que el arco que comprende. En particular, *un ángulo inscrito que abarca un diámetro es recto*.

Cuadrilátero cíclico. Un cuadrilátero se llama cíclico si tiene los cuatro vértices en una misma circunferencia. En un cuadrilátero cíclico la suma de los ángulos opuestos es 180º.

Potencia de un punto respecto de una circunferencia. Sean P un punto, $\mathcal{C}$ una circunferencia y A, B los puntos de corte de cualquier recta que pasa por P con la circunferencia. Entonces el producto $PA \cdot PB$ no depende de A y B y se llama potencia de P respecto de $\mathcal{C}$.

Eje radical de dos circunferencias. Es una recta formada por los puntos que tienen la misma potencia respecto de las dos circunferencias. Si las circunferencias son secantes, es la recta que pasa por los dos puntos de intersección.

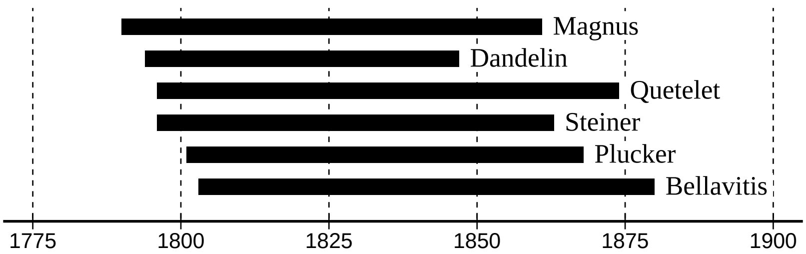
Circunferencia de los nueve puntos. En cualquier triángulo, los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro y los vértices, están en una misma circunferencia, llamada circunferencia de los nueve puntos o circunferencia de Euler. Tiene su centro en el punto medio entre el ortocentro y el circuncentro, y su radio es exactamente la mitad que el de la circunferencia circunscrita.

7. Nota histórica

Según dice Howard Eves [3], la historia de la inversión es compleja. François Vièta ya hablaba de puntos inversamente relacionados en el siglo XVI. Robert Simson, en su restauración de la obra perdida *Lugares planos* de Apolonio incluyó, basándose en un comentario hecho por Pappus, uno de los teoremas básicos de la teoría de inversión, el de que el inverso de una recta o una circunferencia es también una recta o una circunferencia. Simon A. J. L'Huilier (1750-1840) en sus *Eléments d'analyse géométrique et d' anlyse algebrique appliquées à la recherche des lieux géometriques* (París y Génova, 1808) dio casos especiales de este teorema.

Pero la inversión como una transformación para simplificar el estudio de figuras data de tiempos más recientes, y fue utilizada independientemente por varios autores. Bützberger remonta el uso de la inversión por parte de Jakob Steiner a 1824.

Patterson [5] apunta la siguiente cronología:



1822 Dandelin publica su Tableau Comparatif para la hipérbola y la focal.

1823 Quetelet compara caústicas secundarias y cónicas a la manera de Dandelin

1824 Steiner habla de inversión en un manuscrito no publicado hasta 1913.

1825 Dandelin deduce la relación $rr' = R^2$ correspondiente a radio vectores de lemniscatas y cónicas, dando lugar a una nueva construcción de aquellas.

1825 Quetelet define la inversa de una curva.

1831 Plücker explica sus *neues Übertragungs-Princip*, que fue publicado en 1834

1836 Bellavitis dio una exposición completa de la teoría de las figuras inversas.

1845 Lord Kelvin la aplica a sus estudios sobre elasticidad.

Referencias

[1] *Art of Problem Solving.* Foro de discusión sobre resolución de problemas. Pueden verse muchos y buenos problemas sobre una gran gama de temas y varios niveles de dificultad. `http://www.artofproblemsolving.com/`

[2] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L. *Geometry Revisited.* Washington, DC: Mathematical Association of America, 1967.

[3] Eves, H. W. *A Survey of Geometry.* Boston, MA: Allyn and Bacon, 1972.

[4] Ogilvy, C. S. *Excursions in Geometry.* New York: Dover, pp. 143-153, 1990.

[5] Patterson, Boyd C.: "The Origins of the Geometric Principle of Inversion". *Isis*, Vol. 19, No. 1. (Apr., 1933), págs. 154-180.

[6] Stankova-Frenkel, Z. *Inversion in the Plane. Part I and II.* Disponible en `http://math.berkeley.edu/~stankova/MathCircle/sessions-index.html`

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: