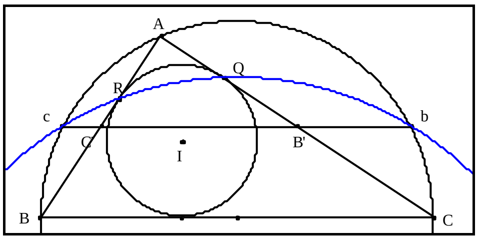
ALGUNOS TEOREMAS OLVIDADOS

Jean-Louis AYME
Lycée Lislet Geoffroy, 97400 St-Denis, Île-de-la-Réunion, France

Resumen. "No problem is ever permanently closed" como recuerda la sección Soluciones de la revista canadiense *CruxMathematicorum*. Desde este punto de vista, presentamos una nueva solución del Problema 1671 propuesto por el geómetra T. Seimiya haciendo intervenir algunos teoremas olvidados.

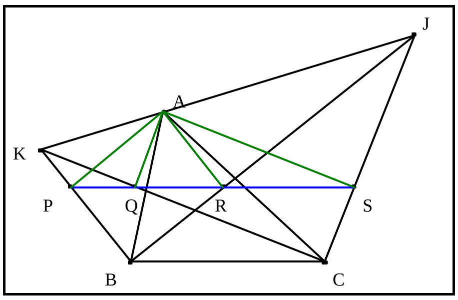
1. El problema de Toshio Seimiya. [1]



Hipótesis:	ABC	un triángulo rectángulo en A,
	B', C'	los puntos medios de los lados [AC], [AB],
	Γ	el círculo circunscrito a ABC,
	b, c	los puntos de intersección de la recta (B'C') con Γ,
	γ_I	el círculo de centro I, inscrito en ABC
y	Q, R	los puntos de contacto de γ_I cpn [AC] y [AB].

Conclusión: los puntos b, c, Q y R sont concíclicos.

2. El teorema de Arthur Lascases o Lescaze.
Discípulo de Gérono (1799-1892), el francés Lascases de Lorient publicó en los *Nouvelles Annales* de 1859, el resultado siguiente [2]:

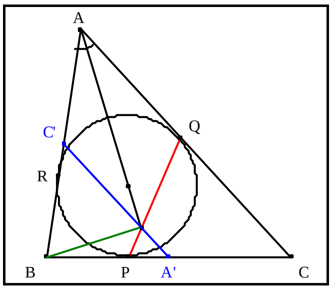


Hipótesis: ABC un triángulo,
B', C' los puntos medios de los lados [CA], [AB],
J, K los centros de los círculos exinscritos de ABC en B, en C
y P, Q, R, S los pies de las perpendiculares trazadas desde A sobre (BK), (CK), (BJ) et (CJ).

Conclusión: los puntos P, Q, R y S están alineados sobre la recta (B'C').

3. Una concurrencia inverosímil.

Este teorema, que ha sido estudiado por Ross Honsberger [3], ya había sido propuesto como ejercicio por Nathan Altshiller-Court [4] y resuelto antes por Georges Papelier [5] en el caso de un triángulo rectángulo.



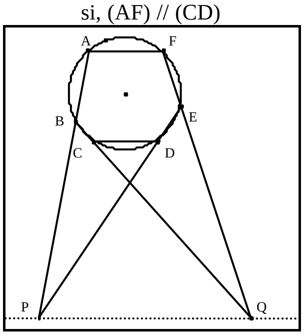
Hipótesis:	ABC	un triángulo no isóceles en A,
	A', C'	los puntos medios de los lados [BC], [AB],
	γ	el círculo inscrito en ABC,
	P, Q, R	los puntos de tangencia de γ con los lados [BC], [CA], [AB],
	Δ_A	la A-bisectriz de ABC
y	D_B	la perpendicular à Δ_A , que pasa por B.

Conclusión: las rectas Δ_A , D_B y (PQ) son concurrentes sobre (A'C').

Nota: la recta (B'C') no es citada por ninguno de los autorers previamente citados.

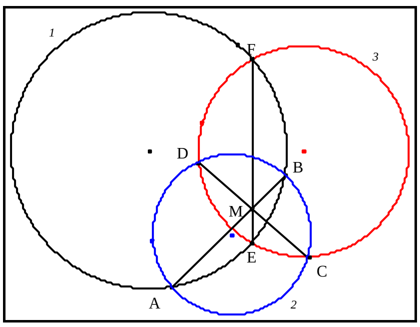
4. El teorema deAubert.
En 1899, Paul Aubert [6] demuestra un caso particular del "hexagrama místico" de Pascal (1623-1662).

ABCDEFA es un hexágono cíclico
si, (AF) // (CD)



entonces, (PQ) // (AF)

5. El teorema de las tres cuerdas de Monge.
Este notable resultado ha sido attribuido a Gaspard Monge (1746-1818) por Jean Victor Poncelet [8].

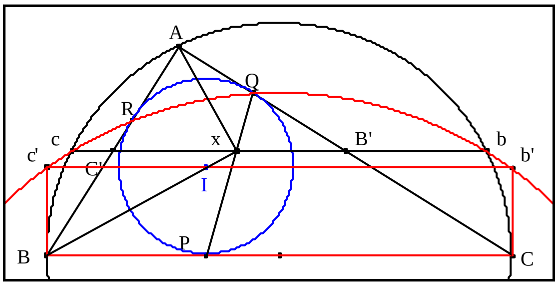


Hipótesis:	*1, 2, 3*	tres círculos secantes dos a dos,
	A, B	los puntos de intersección de *1 y 2*,
	C, D	los puntos de intersección de *2 y 3*
	E, F	los puntos de intersección de *3 y 1*

y M el punto de intersección de las cuerdas [AB] y [CD].

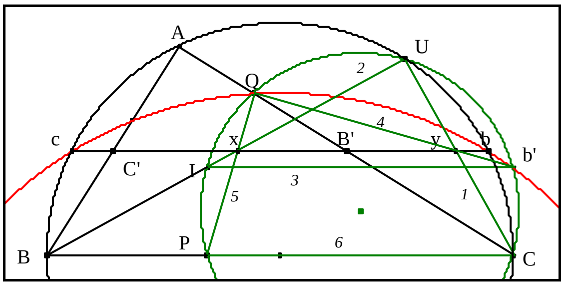
Conclusión: la cuerda [EF] pasa por M.

6. Una nueva demostración del problema de T. Seimiya.



- Llamamos x al pie de la perpendicular trazada desde A sobre la bisectriz (BI);
  según Papelier, x está sobre la recta (PQ);
  según Lascases, x está sobre (B'C').
  Por el teorema de Thales, (B'C') // (BC) i.e. (bc) // (BC).

- Llamemos b', c' a los points tales que BCb'c' sea un rectángulo cuyo lado [b'c'] pasa por I;
  el trapecio c'b'bc es isósceles, luego es cíclico.



- Llamemos U al segundo punto de intersección de la B-bisectriz de ABC con Γ
  e y al punto de intersección de las rectas (CU) y (Qb').
  Según Thales, el triángulo UBC es inscriptible en un semi-círculo, luego es rectángulo en U.

- Tracemos el círculo verde de diámètro [CI]; que pasa por los puntos P, Q, U y b';
  según Aubert, la recta (xy) del hexágono cíclico CUIb'QPC es paralela a (BC);
  según el postulado de Euclides, (xy) pasa por b.

- Según el teorema de las tres cuerdas aplicado a los círculos negro, rojo y verde, el círculo rojo pasa por Q.

- Mutatis mutandis, demostraríamos que el círculo rojo pasa por R.

- Conclusión: los puntos b, c, Q y R son concíclicos.

Referencias (historicas y académicas)

[1] Toshio Seimiya (mars 1910-), Problem 1671, *Crux Mathematicorum* **8**, vol 17, (1991) 237.
P. Penning, Solution to problem 1671, *Crux Mathematicorum* **7**, vol 18 **(1992)** 216-218.
[2] Arthur Lascases, Question 477, *Nouvelles Annales* **18** (1859) 171.
F.G.M., Théorème 165, *Exercices de Géométrie*, (1920) 327, Rééditions J. Gabay.
[3] R. Honsberger, An unlikely concurrence, *Episodes in Nineteeth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA (1995) 31.
[4] N. Altshiller-Court, Exercise 43, *College Geometry*, Barnes & Noble, Inc. (1952) 118.
[5] G. Papelier G., Pôles et polaires, *Exercices de géométrie Modernes* (1927), Rééditions J. Gabay, 19.

[6] P. Aubert, Généralisation du problème de Pascal donnant neuf points en ligne droite, *Journal de mathématiques élémentaires* (1899).
P. Aubert P., Question 4604, *Journal de mathématiques élémentaires* de Vuibert (1899) 2.
F.G.M., Théorème 374 III, *Exercices de Géométrie*, (1920) 560, Eds. Gabay.
[7] J. L. M'Kensie , *Journal de Mathématiques Spéciales* de de Longchamps(1887) 201.
[8] J. V. Poncelet, tome 1, *Traité projective des figures* (1822) 40.

Agradecimientos. Agradezco al Profesor Francisco Bellot Rosado que respondiera a mi petición enviándome las soluciones métricas de P. Penning, de su esposa María Ascensión López Chamorro así como la suya. Esta ayuda haa contribuído sin ninguna duda a la aparición de este artículo y le agradezco igualmente haberlo leído con atención y haberlo traducido.

AYME Jean-Louis
37, rue Ste.-Marie
97400 St.-Denis
Ile-de-la-Réunion
France

e-mail: <jeanlouisayme@yahoo.fr>

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI