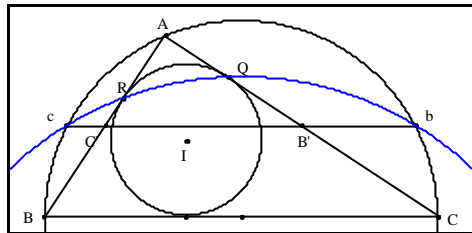


# ALGUNOS TEOREMAS OLVIDADOS

Jean-Louis AYME  
 Lycée Lislet Geoffroy, 97400 St-Denis, Île-de-la-Réunion, France

**Resumen.** "No problem is ever permanently closed" como recuerda la sección Soluciones de la revista canadiense *Crux Mathematicorum*. Desde este punto de vista, presentamos una nueva solución del Problema 1671 propuesto por el geómetra T. Seimiya haciendo intervenir algunos teoremas olvidados.

## 1. El problema de Toshio Seimiya. [1]

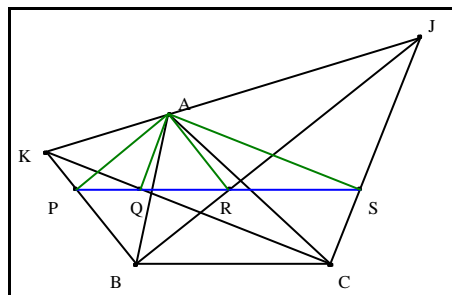


Hipótesis:     ABC     un triángulo rectángulo en A,  
                   B', C'    los puntos medios de los lados [AC], [AB],  
                    $\Gamma$      el círculo circunscrito a ABC,  
                   b, c     los puntos de intersección de la recta (B'C') con  $\Gamma$ ,  
                    $\gamma_I$      el círculo de centro I, inscrito en ABC  
                   y     Q, R    los puntos de contacto de  $\gamma_I$  con [AC] y [AB].

Conclusión:    los puntos b, c, Q y R sont concíclicos.

## 2. El teorema de Arthur Lascases o Lescaze.

Discípulo de Gérono (1799-1892), el francés Lascases de Lorient publicó en los *Nouvelles Annales* de 1859, el resultado siguiente [2]:

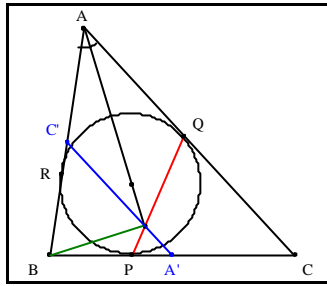


Hipótesis:     ABC     un triángulo,  
                   B', C'    los puntos medios de los lados [CA], [AB],  
                   J, K     los centros de los círculos exinscritos de ABC en B, en C  
                   y     P, Q, R, S    los pies de las perpendiculares trazadas desde A sobre (BK), (CK), (BJ)  
                   et (CJ).

Conclusión:    los puntos P, Q, R y S están alineados sobre la recta (B'C').

## 3. Una concurrencia inverosímil.

Este teorema, que ha sido estudiado por Ross Honsberger [3], ya había sido propuesto como ejercicio por Nathan Altshiller-Court [4] y resuelto antes por Georges Papelier [5] en el caso de un triángulo rectángulo.



Hipótesis:  $ABC$  un triángulo no isóceles en  $A$ ,  
 $A', C'$  los puntos medios de los lados  $[BC]$ ,  $[AB]$ ,  
 $\gamma$  el círculo inscrito en  $ABC$ ,  
 $P, Q, R$  los puntos de tangencia de  $\gamma$  con los lados  $[BC]$ ,  $[CA]$ ,  $[AB]$ ,  
 $\Delta_A$  la  $A$ -bisectriz de  $ABC$   
y  $D_B$  la perpendicular a  $\Delta_A$ , que pasa por  $B$ .

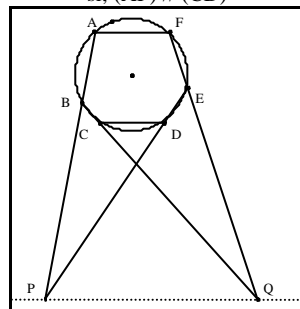
Conclusión: las rectas  $\Delta_A$ ,  $D_B$  y  $(PQ)$  son concurrentes sobre  $(A'C')$ .

Nota: la recta  $(B'C')$  no es citada por ninguno de los autores previamente citados.

#### 4. El teorema de Aubert.

En 1899, Paul Aubert [6] demuestra un caso particular del "hexagrama místico" de Pascal (1623-1662).

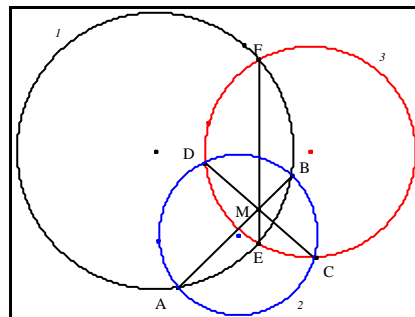
ABCDEF es un hexágono cíclico  
si,  $(AF) \parallel (CD)$



entonces,  $(PQ) \parallel (AF)$

#### 5. El teorema de las tres cuerdas de Monge.

Este notable resultado ha sido atribuido a Gaspard Monge (1746-1818) por Jean Victor Poncelet [8].

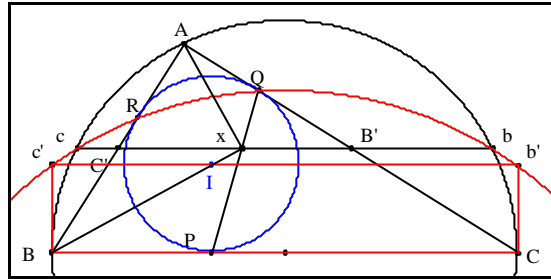


Hipótesis:  $1, 2, 3$  tres círculos secantes dos a dos,  
 $A, B$  los puntos de intersección de  $1$  y  $2$ ,  
 $C, D$  los puntos de intersección de  $2$  y  $3$   
 $E, F$  los puntos de intersección de  $3$  y  $1$

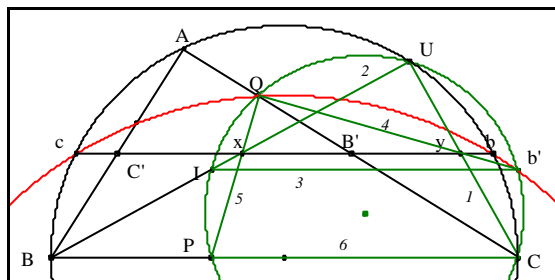
y M el punto de intersección de las cuerdas [AB] y [CD].

Conclusión: la cuerda [EF] pasa por M.

### 6. Una nueva demostración del problema de T. Seimiya.



- Llamamos  $x$  al pie de la perpendicular trazada desde A sobre la bisectriz (BI);  
según Papelier,  $x$  está sobre la recta (PQ);  
según Lascases,  $x$  está sobre (B'C').  
Por el teorema de Thales, (B'C') // (BC) i.e. (bc) // (BC).
- Llamemos  $b', c'$  a los puntos tales que BCb'c' sea un rectángulo cuyo lado [b'c'] pasa por I; el trapecio c'b'bc es isósceles, luego es cíclico.



- Llamemos  $U$  al segundo punto de intersección de la B-bisectriz de ABC con  $\Gamma$   
e y al punto de intersección de las rectas (CU) y (Qb').  
Según Thales, el triángulo UBC es inscriptible en un semi-círculo, luego es rectángulo en U.
- Tracemos el círculo verde de diámetro [CI]; que pasa por los puntos P, Q, U y b';  
según Aubert, la recta (xy) del hexágono cíclico CUIb'QPC es paralela a (BC);  
según el postulado de Euclides, (xy) pasa por b.
- Según el teorema de las tres cuerdas aplicado a los círculos negro, rojo y verde, el círculo rojo pasa por Q.
- Mutatis mutandis, demostraríamos que el círculo rojo pasa por R.
- Conclusión: los puntos b, c, Q y R son concíclicos.

### Referencias (historicas y académicas)

- [1] Toshio Seimiya (mars 1910- ), Problem 1671, *Crux Mathematicorum* **8**, vol 17, (1991) 237.  
P. Penning, Solution to problem 1671, *Crux Mathematicorum* **7**, vol 18 (1992) 216-218.
- [2] Arthur Lascases, Question 477, *Nouvelles Annales* **18** (1859) 171.  
F.G.M., Théorème 165, *Exercices de Géométrie*, (1920) 327, Rééditions J. Gabay.
- [3] R. Honsberger, An unlikely concurrence, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA (1995) 31.
- [4] N. Altshiller-Court, Exercice 43, *College Geometry*, Barnes & Noble, Inc. (1952) 118.
- [5] G. Papelier G., Pôles et polaires, *Exercices de géométrie Modernes* (1927), Rééditions J. Gabay, 19.

[6] P. Aubert, Généralisation du problème de Pascal donnant neuf points en ligne droite, *Journal de mathématiques élémentaires* (1899).

P. Aubert P., Question 4604, *Journal de mathématiques élémentaires* de Vuibert (1899) 2.

F.G.M., Théorème 374 III, *Exercices de Géométrie*, (1920) 560, Eds. Gabay.

[7] J. L. McKensie , *Journal de Mathématiques Spéciales* de de Longchamps(1887) 201.

[8] J. V. Poncelet, tome 1, *Traité projective des figures* (1822) 40.

**Agradecimientos.** Agradezco al Profesor Francisco Bellot Rosado que respondiera a mi petición enviándome las soluciones métricas de P. Penning, de su esposa María Ascensión López Chamorro así como la suya. Esta ayuda ha contribuido sin ninguna duda a la aparición de este artículo y le agradezco igualmente haberlo leído con atención y haberlo traducido.

AYME Jean-Louis

37, rue Ste.-Marie

97400 St.-Denis

Ile-de-la-Réunion

France

e-mail: <jeanlouisayme@yahoo.fr>

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/>

Edita:

