# <u>Relación del Ortocentro en un Triángulo</u>

Juan Carlos Salazar

## <u>Introducción</u>

Estableceremos una relación entre los cuadrados de las distancias desde el ortocentro (H) hacia los vértices (A, B, C) y los cuadrados de los lados (a, b, c) de un triángulo acutángulo (ABC) con el circunradio (R) y el inradio ($r_0$) de su triángulo órtico (pedal) .

## <u>Teorema:</u>

Sea el triángulo acutángulo ABC, de ortocentro H, de circunradio (R), cuyo triángulo órtico (pedal) es $H_a$, $H_b$, $H_c$ con inradio ($r_0$).

Demostrar que:

$$\frac{AH^2 + BH^2 + CH^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{R - r_0}{2R + r_0}$$

## <u>Demostración:</u>

Para facilidad de nuestro análisis estableceremos primero las relaciones métricas tomando como referencia al triángulo excentral $I_aI_bI_c$, para luego utilizarlas en el triángulo ABC, aplicando las relaciones métricas para sus elementos análogos respectivos.

Consideramos el triángulo ABC, de incentro I (también ortocentro de su triángulo excentral $I_aI_bI_c$), siendo d la distancia ente su incentro (I) y circuncentro (O), denominamos $O_1$ al circuncentro del triángulo excentral $I_aI_bI_c$, luego tenemos que O es punto medio de $IO_1$, recordemos que el circuncentro O del triángulo ABC es también el centro de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo excentral $I_aI_bI_c$.

Aplicando el teorema de Apolonio (conocido como teorema de la Mediana), para el triángulo $I_aIO_1$:

$$I_aI^2 + I_aO_1^2 = 2I_aO^2 + \frac{IO_1^2}{2} = 2I_aO^2 + 2d^2$$

También por el Teorema de Euler: $d^2 = R^2 - 2Rr$ y $I_aO^2 = R^2 + 2Rr_a$ , donde $r_a$ es el radio del excírculo opuesto al vértice A, además se cumple: $I_aO_1 = 2R$ (circunradio del triángulo excentral $I_aI_bI_c$). Entonces:

$$I_aI^2 + 4R^2 = 2(R^2 + 2Rr_a) + 2R^2 - 4Rr = 4R^2 + 4Rr_a - 4Rr$$
$$I_aI^2 = 4R(r_a - r)$$

De manera similar: $I_bI^2 = 4R(r_b - r)$ y $I_cI^2 = 4R(r_c - r)$

Así tenemos que: $I_aI^2 + I_bI^2 + I_cI^2 = 4R(r_a + r_b + r_c - 3r)$

Como: $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ (Teorema de Steiner)

Luego:

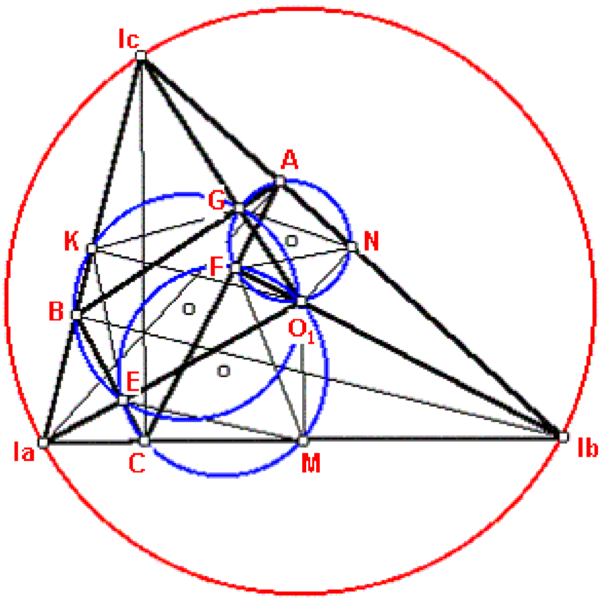
$I_aI^2 + I_bI^2 + I_cI^2 = 8R(2R - r)$

Como I es el ortocentro del triángulo excentral $I_aI_bI_c$, esta relación puede ser aplicada análogamente para el triángulo ABC de ortocentro H, de circunradio R e inradio $r_0$ de su triángulo órtico, considerando que el circunradio del triángulo ABC es la mitad del circunradio de su triángulo excentral $I_aI_bI_c$.

Por lo tanto para el triángulo ABC:

$AH^2 + BH^2 + CH^2 = 4R(R - r_0)$ ..................(I)

Si analizamos el triángulo excentral $I_aI_bI_c$ de circuncentro $O_1$, donde el triángulo ABC es su triángulo órtico o pedal, donde además tenemos que M, N y K son puntos medios de los lados $I_aI_b$, $I_bI_c$ e $I_aI_c$ respectivamente. Ver la figura siguiente, que representa una configuración posible.




Tenemos que $O_1I_a$, $O_1I_b$ y $O_1I_c$ o sus prolongaciones intersecan a los lados BC, AC y AB en los puntos E, F y G, por lo tanto los cuadriláteros NAGF, EBKG y MCEF son cincunscriptibles, cuyos tres circulos se intersecan también en el circuncentro $O_1$.

Para el vértice $I_a$, $I_aO_1$ eje radical de los circuncirculos de los cuadriláteros MCEF y EBKG:

$I_aD.I_aM = I_aD.\frac{I_aI_b}{2} = I_aE.\ I_aO_1$

$I_aD.\frac{I_aI_b}{2} = 2R.I_aE$ ……….(1)

Para el vértice $I_b$, $I_bO_1$ eje radical de los circuncirculos de los cuadriláteros MCEF y NAGF:

$I_bD.\ I_bM = I_bD.\frac{I_aI_b}{2} = I_bF.\ I_b\ O_1$

$I_bD.\frac{I_aI_b}{2} = 2R.\ I_bF$ ……….(2)

(1)+(2):

$$\frac{I_aI_b}{2}(I_aD + I_bD) = \frac{I_aI_b{}^2}{2} = 2R(I_aE + I_bF)$$

$I_aI_b{}^2 = 4R(I_aE + I_bF)$ ........(3)

Similarmente obtenemos:

$I_bI_c{}^2 = 4R(I_cG + I_bF)$ ........(4)

$I_aI_c{}^2 = 4R(I_cG + I_aE)$ .......(5)

A partir de (3), (4) y (5):

$$I_aI_b{}^2 + I_bI_c{}^2 + I_aI_c{}^2 = 8R(I_aE + I_bF + I_cG)$$

Donde: $r_a = I_aE$, $r_b = I_bF$, $r_c = I_cG$, luego:

$$I_aI_b{}^2 + I_bI_c{}^2 + I_aI_c{}^2 = 8R(r_a + r_b + r_c)$$

Además: $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ (Teorema de Steiner)

Por lo tanto:

$$I_aI_b{}^2 + I_bI_c{}^2 + I_aI_c{}^2 = 8R(4R + r)$$

Considerando que en esta relación r es el inradio del triángulo ABC (triángulo órtico del triángulo excentral $I_aI_bI_c$), igualmente esta se puede aplicar en forma análoga para el triángulo acutángulo ABC de circunradio R e inradio $r_0$ de su triángulo órtico.

Luego, para el triángulo ABC:

$a^2 + b^2 + c^2 = 4R(2R + r_0)$ ..................(II)

Finalmente, dividiendo (I)/(II):

$$\frac{AH^2 + BH^2 + CH^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{R - r_0}{2R + r_0} \qquad \text{LQQD.}$$

.