

## TEOREMA DE MORLEY

Prof. Juan Manuel Conde  
Departamento de Análisis Matemático.  
Universidad de Alicante

Un resultado de geometría elemental inesperado y sorprendente, descubierto en 1904 por el geómetra anglo-americano Frank Morley (1860-1937), afirma, que si se dividen en tres partes iguales los ángulos interiores de un triángulo cualquiera, mediante pares de semirrectas que parten de cada vértice, entonces los pares de semirrectas adyacentes a cada lado, determinan tres puntos que son los vértices de un triángulo que siempre es *equilátero*.

Este teorema, comentado de manera informal por F. Morley a sus amigos de Cambridge, no se publicó hasta 20 años más tarde de su descubrimiento. Fue en la revista japonesa de Educación Secundaria “Journal of the Mathematical Association of Japón for the Secondary Education”. (Número 6, diciembre de 1924, pp.260-262).

Morley fue una persona notable. Aunque pasó los últimos 50 años de su vida en Estados Unidos (la mayoría en la universidad de Johns Hopkins) nunca renunció a su nacionalidad británica. Además de ser un matemático de primera fila era un excelente jugador de ajedrez y tuvo el honor de vencer a Emmanuel Lasker cuando era campeón del mundo.

Este teorema también fue redescubierto y presentado como un problema en la revista “Mathematical Questions and Their Solutions from the Educational Times (New Series)”, 15 (1909) pp.47. (\*)

Al final de este artículo se adjunta la traducción de la carta que F. Morley envió al profesor japonés T. Hayasi, para interesarle por la publicación de este teorema. También se añaden unos comentarios de Leon Bankoff, sobre las distintas formas en que se ha ido demostrando este teorema.

Se conjetura que posiblemente este teorema se les “escapó” a los griegos al no poder resolver en general el problema de la trisección de un ángulo con regla y compás. Una identificación errónea de no constructibilidad con no existencia.

Aquí presentamos varias demostraciones de este notable teorema, de las numerosas que se han ido incorporando a lo largo de todo este tiempo.

Es necesario además, citar otras dos demostraciones, una de geometría elemental de M.T. Naraniengar de 1909, que posteriormente redescubrió en 1622 J.M. Child (“A proof. of Morley’s theorem, Math. Gaz.” (1922) 171 y otra trigonométrica de M. Satyanarayana, aparecidas a los diez años de descubrirse este teorema. La primera puede encontrarse en (\*) y en el libro “Geometry Revisited” de H.S.M.Coxeter publicado por la M.A.A. (pp. 47-49) y la segunda por el mismo autor, en el libro “Fundamentos de Geometría” de Limusa Willey (pp. 47-48).

### **Enunciado del Teorema de Morley:**

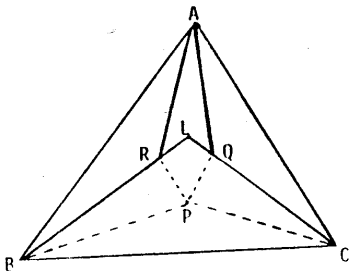
*Los tres puntos intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo cualquiera forman un triángulo equilátero.*

## DEMOSTRACIÓN DE A. ROBSON.

Se reproduce la demostración de A. Robson que fue publicada en “*The Mathematical Gazette*” 11 (1922-1923), pp. 310-311.

Esta prueba de Robson es una de las demostraciones más cortas conocidas y una de las mejores.

Consideremos un triángulo  $ABC$  y las dos trisectrices de cada ángulo. Las trisectrices de  $B$  cortan a las correspondientes a  $C$  en  $P$  y  $L$ , y las trisectrices de  $A$  cortan a  $BL$  y  $CL$  respectivamente en  $R$  y  $Q$ .



Además  $BRL$  corta a  $AQ$  en  $U$ ,  $AQ$  corta a  $BP$  en  $N$ ,  $AQ$  corta a  $CP$  en  $V$ ,  $CP$  corta a  $AR$  en  $M$  y  $QM$  corta a  $RN$  en  $O$ .

Entonces  $BP$  y  $BL$  son isogonales y por tanto también  $CP$  y  $CL$ . Se deduce así que:

- i)  $AP$  y  $AL$  son isogonales.
- ii) El haz  $A(BRLU)$  es igual al haz  $A(CVPM)$ .
- iii) Los siguientes tres haces son iguales:  
 $N(BRLU) = Q(CVPM) = Q(PMCV)$ .

Y estas tres últimas proyectividades tienen un rayo común y por tanto sus correspondientes rayos tienen intersecciones colineales; es decir  $P, O, L$  son colineales.

Como  $R$  está en el incentro de  $ANB$ ,  $\angle ARN = 90^\circ + \frac{1}{3}B$ . Análogamente como  $Q$  está en el incentro de  $AMC$ ,  $\angle RMQ = 90^\circ - \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}C$ . La diferencia entonces es  $\angle ROM = 60^\circ$ . De manera similar los otros ángulos en  $O$  son  $60^\circ$ . Los triángulos  $ORL$  y  $OQL$  son congruentes porque tienen una base común y ángulos iguales que forman con los otros lados. Por el mismo motivo son congruentes los triángulos  $ORL$  y  $OQL$  y también son congruentes los triángulos  $PRL$  y  $PQL$ .

*Observaciones de Dan Pedoe a la prueba de Robson :*

1. La demostración utiliza la idea de *rayos isogonales*. Si dos rayos (semirrectas) parten del mismo vértice de un ángulo y forman ángulos iguales con los lados se denominan rayos isogonales. Y son simétricos respecto de la bisectriz interior del ángulo.

2. El resultado que emplea Robson de isogonales es:  
Si tres semirrectas trazadas cada una desde un vértice de un triángulo son concurrentes, entonces sus tres rectas isogonales son también concurrentes.

3. Robson utiliza luego la idea de haces proyectivos, haces con igual razón doble, y también el teorema que afirma que si dos haces proyectivos tienen un rayo común, entonces las tres intersecciones e los correspondientes rayos son colineales.

4. Y por último Robson hace uso del teorema que permite intercambiar en una razón doble un par de elementos con otro par sin que se altere el valor de la razón doble.

La demostración de Robson es tan corta como uno puede desear y evita elaborar construcciones iniciales, aunque quizá no todos querrían llamarla una prueba elemental.

### DEMOSTRACIÓN GEOMÉTRICA ELEMENTAL DE DAN SOKOLOWSKY.

El teorema se demuestra como consecuencia de un lema sencillo que se establecerá más adelante, pero primeramente se indicará como se llega al lema pues esto demostrará al mismo tiempo como el teorema de Morley es un corolario del mismo.

En el triángulo  $ABC$ , denotamos por  $V_s$  la trisectriz del ángulo  $V$  adyacente al lado  $s$ , donde  $V = A, B, C$  y  $s = a, b, c$ .

Las trisectrices  $B_a, C_a$  se cortan en  $X$  y las trisectrices  $B_c, C_b$  se encuentran en  $R$ . Entonces  $X$  es el incentro de del triángulo  $RBC$ , que está a una distancia  $r$  (radio inscrito) de los lados  $BR$  y  $CR$ . Sea  $P$  (que está en  $AB$ ) el simétrico de  $X$  respecto de  $BR$  y  $Q$  (que está en  $AC$ ) el simétrico de  $X$  respecto de  $CR$ . Entonces  $XP = XQ = 2r$  y  $BR, CR$  son mediatrices de  $XP, XQ$  respectivamente.

Denotemos a  $O$  el circuncentro  $K$  del triángulo  $APQ$  y sea  $\omega$  el arco de  $K$  subtendido por el ángulo  $A$ . Tomando  $A = 3\alpha$ ,  $B = 3\beta$  y  $C = 3\gamma$ , tales que  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , tenemos que  $\omega = \angle POQ = 6\alpha$ .

Supongamos que:

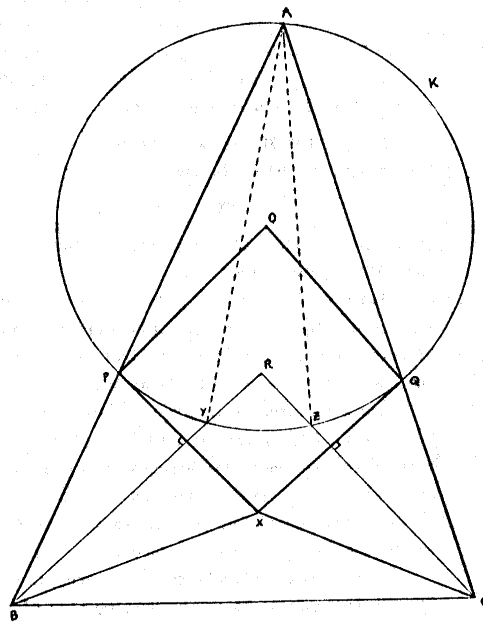
- i)  $BR$  y  $CR$  cortan a  $\omega$  en  $Y$  y  $Z$  respectivamente.
- ii)  $Y$  y  $Z$  trisecan el arco  $\omega$ .
- iii) El triángulo  $XYZ$  es equilátero.

Entonces el teorema de Morley se deduce inmediatamente.

El lema establece que esas suposiciones son ciertas. Y esto se debe al hecho de que el cuadrilátero  $OPXQ$  tiene dos propiedades especiales:

- a) Es simétrico respecto  $OX$  (lo que es obvio).
- b) Sus ángulos en  $P, Q$  y  $X$  son iguales.

Para probar b) observemos que,



$$\angle BXP = 90^\circ - \beta, \quad \angle CXQ = 90^\circ - \gamma, \quad \angle BXC = 180^\circ - (\beta + \gamma).$$

La suma de esos tres ángulos es  $360^\circ - 2(\beta + \gamma)$ ;

por tanto  $\angle PXQ = 2(\beta + \gamma) = 120^\circ - 2\alpha$ . Como los ángulos en  $P$  y  $Q$  son iguales, y en  $O$  es  $6\alpha$ , se deduce que los ángulos en  $P, Q$  y  $X$  son todos iguales a  $120^\circ - 2\alpha$ .

Se establece el siguiente lema:

*En el cuadrilátero  $OPXQ$ , suponemos que  $OP = OQ$  y  $XP = XQ$  y los ángulos en  $O$  y en  $X$  son  $6\alpha$  y  $120^\circ - 2\alpha$  respectivamente.  $K$  denota la circunferencia de centro  $O$  y radio  $OP$ , y sea  $\omega$  el arco de  $K$  que subtiende el ángulo en  $O$ .*

*Entonces las mediatrices de  $XP$  y de  $XQ$  cortan a  $\omega$  en los puntos  $Y, Z$  respectivamente, tales que  $Y$  y  $Z$  trisecan  $\omega$  y el triángulo  $XYZ$  es equilátero.*

**Demostración:**

Los puntos  $P$  y  $Q$  cortan de nuevo a la circunferencia  $K$  en  $S$  y  $T$  respectivamente. De las hipótesis se tiene claramente que los triángulos  $OPX$  y  $OQX$  son semejantes y que  $\angle OPX = \angle OQX = 120^\circ - 2\alpha$ .

Entonces  $\angle OTQ = \angle OQT = 60^\circ + 2\alpha$ ; por tanto  $PX$  es paralelo a  $OT$ . Análogamente  $QX$  es paralelo a  $OS$  y así  $OSXT$  es un rombo y  $\angle TOS = \angle PXQ = 60^\circ + 2\alpha$ ; por tanto  $OPXT$  es un trapecio isósceles. La mediatriz de  $PX$  es entonces también la mediatriz de  $OT$ , que por tanto corta a la circunferencia  $K$  en los dos puntos  $Y, Y'$  (donde  $Y$  está situado en el mismo lado de  $OT$  como  $XT$ ).

Ahora  $X$  es interior al ángulo  $\angle POQ$  y entonces  $OX$  corta a  $\omega$  en un punto  $V$ . Claramente  $OX$  y por tanto  $OV$  bisecan el ángulo  $\angle POQ$  y también el ángulo  $\angle TOS$ . De este modo  $\angle TOV = 60^\circ - \alpha$ , mientras que  $\angle POV = \angle QOV = 3\alpha$ . Como  $Y$  está en la mediatriz de  $OT$ , tenemos que  $OY = TY$  y de esta forma el triángulo  $TOY$  es equilátero y  $\angle TOY = 60^\circ$ . Debido a que  $V$  está en el mismo lado de  $OT$  que  $X$ , tenemos que  $\angle YOY = \alpha$ , y entonces  $Y$  está en el arco  $\omega$ . Por las mismas razones  $\angle POY = 2\alpha$  (así  $Y$  triseca el arco  $\omega$ ), e  $Y$  está en el mismo lado de  $OX$  que  $P$ , pues  $\angle POV = 3\alpha < 180^\circ$ .

Podemos demostrar de forma análoga que la mediatriz de  $QX$  corta a  $\omega$  en un punto  $Z$  que triseca  $\omega$  y está en el mismo lado de  $OX$  que  $Q$ . Así  $PY = YZ = ZQ$ .

Por último,  $PY = XY$  y  $ZQ = ZX$ , lo que implica que  $XY = YZ = ZX$  con lo que el triángulo  $XYZ$  es equilátero. Eso completa la demostración del lema del que se deduce, como se ha visto anteriormente, el teorema de Morley.

## **DEMOSTRACIÓN TRIGONOMÉTRICA DE GINO LORIA**

La demostración de Gino Loria aparece dentro del artículo "Triangles équilatéraux dérivés d'un triangle quelconque" publicado por The Mathematical Gazette 23 (1939) pp.364-362. En una carta enviada al profesor Gino Loria por Frank Morley, fechada el 22 de agosto de 1934, le comenta éste que él además mencionó su teorema en "Extensión of Clifford's Chain Theorem" American Journal of Mathematics, Vol 51, July 1929.

Dado un triángulo cualquiera  $ABC$ , las primeras trisectrices de los ángulos  $B$  y  $C$  se cortan en el punto  $x$ ; significado análogo tiene  $y$  respecto del lado  $AC$  y  $z$  respecto del lado  $AB$ . Entonces, ¿Qué tipo de triángulo es  $xyz$ ?

Notemos que se tiene que  $\angle BxC = \pi - \frac{1}{3}(B+C) = \frac{2}{3}\pi + A$ ; en consecuencia el triángulo

$BCx$  nos da  $\frac{a}{\text{sen}\left(\frac{2}{3}\pi + A\right)} = \frac{Bx}{\text{sen}\frac{1}{3}C}$ . Luego ( $R$  es el radio de la circunferencia

circunscrita)  $Bx = \frac{a \text{sen}\frac{1}{3}C}{\text{sen}\left(\frac{2}{3}\pi + A\right)} = \frac{2R \text{sen}A \text{sen}\frac{1}{3}C}{\text{sen}\left(\frac{2}{3}\pi + A\right)}$ .

Más, teniendo en general que  $\text{sen}\frac{1}{3}x \text{sen}\frac{1}{3}(\pi+x) \text{sen}\frac{1}{3}(2\pi+x) = \frac{1}{4}\text{sen}x$ , (i) se puede

escribir  $Bx = 8R \text{sen}\frac{1}{3}A \text{sen}\frac{1}{3}(\pi+A) \text{sen}\frac{1}{3}C$ . Intercambiando  $A$  por  $C$  se obtiene esta

otra fórmula  $Bx = 8R \text{sen}\frac{1}{3}C \text{sen}\frac{1}{3}(\pi+C) \text{sen}\frac{1}{3}A$ .

Se obtiene que

$$(xz)^2 = (Bx)^2 + (Bz)^2 - 2(Bx)(Bz) \cos\frac{1}{3}B; \text{ (ii)}$$

Por tanto  $\frac{(xz)^2}{64 \text{sen}^2\frac{1}{3}A \text{sen}^2\frac{1}{3}C} = \text{sen}^2\frac{1}{3}(\pi+A) + \text{sen}^2\frac{1}{3}(\pi+C) -$

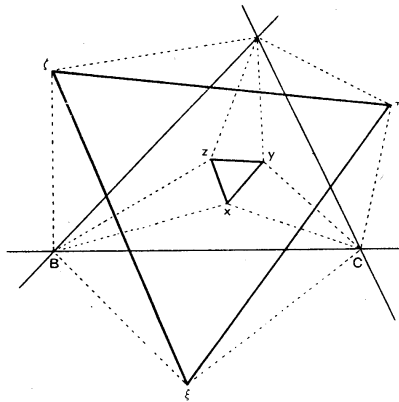
$$2 \text{sen}\frac{1}{3}(\pi+A) \text{sen}\frac{1}{3}(\pi+C) \cos\frac{1}{3}B. \text{ (iii)}$$

Para transformar el segundo miembro de esta relación se puede recurrir a la identidad

siguiente:  $m^2 + n^2 - 2mn \cos\phi = (m-n)^2 \cos^2\frac{1}{2}\phi + (m+n)^2 \text{sen}^2\frac{1}{2}\phi$ .

Suponiendo en particular  $m = \text{sen}\frac{1}{3}(\pi+A)$ ,  $n = \text{sen}\frac{1}{3}(\pi+C)$ ,  $\phi = \frac{1}{3}B$ , se

encuentra  $m+n = 2 \text{sen}\frac{1}{6}B \text{sen}\frac{1}{6}(A-C)$ ,  $m-n = 2 \cos\frac{1}{6}B \cos\frac{1}{6}(A-C)$ .



Esto prueba que el segundo miembro de la fórmula (iii) vale simplemente  $\text{sen}^2\frac{1}{3}B$ ;

Y sustituyendo este valor en la relación (iii) y extrayendo las raíces cuadradas a los dos miembros de la misma se concluye

$$xz = 8R \text{sen}\frac{1}{3}A \text{sen}\frac{1}{3}B \text{sen}\frac{1}{3}C.$$

Como esta expresión es simétrica respecto de los ángulos  $A, B, C$ , se observa que se llegará al mismo resultado calculando los otros dos

lados  $xy$  e  $yz$ ; luego el triángulo  $xyz$  es equilátero.

## DEMOSTRACIÓN TRIGONOMÉTRICA DE CONSTANTIN COCEA

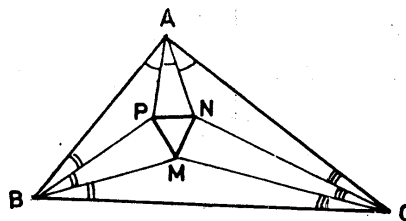
Esta demostración aparece como la solución de un problema más, en un libro notable del matemático rumano Constantin Cocea titulado “200 de problema din geometría triunghiului echilateral” Ed. Gh. ASACHI Iasi 1992.

Los trisectores adyacentes al lado  $AB$  se cortan en  $P$ , los adyacentes al lado  $BC$  en  $M$  y los adyacentes al lado  $CA$  en  $N$ .

Aplicando el teorema de los senos al triángulo

$ABP$  se tiene  $\frac{AP}{\operatorname{sen} \frac{B}{3}} = \frac{AB}{\operatorname{sen} \frac{A+B}{3}}$  y entonces

$$AP = \frac{c \operatorname{sen} \frac{B}{3}}{\operatorname{sen} \frac{\pi-C}{3}} = \frac{2R \operatorname{sen} C \operatorname{sen} \frac{B}{3}}{\operatorname{sen} \frac{\pi-C}{3}}, \text{ siendo } R \text{ el}$$



radio circunscrito del triángulo inicial  $ABC$ . Continuando el cálculo de  $AP$ , se tiene que:

$$AP = \frac{2R \operatorname{sen}(\pi-C) \operatorname{sen} \frac{B}{3}}{\operatorname{sen} \frac{\pi-C}{3}} = \frac{2R \operatorname{sen} \frac{B}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi-C}{3} \left[ 3 - 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi-C}{3} \right]}{\operatorname{sen} \frac{\pi-C}{3}} =$$

$$2R \operatorname{sen} \frac{B}{3} \left[ 3 - 2 \left[ 1 - \cos \frac{2\pi-2C}{3} \right] \right] = 2R \operatorname{sen} \frac{B}{3} \left[ 1 + 2 \cos \frac{2\pi-2C}{3} \right] =$$

$$4R \operatorname{sen} \frac{B}{3} \left[ \frac{1}{2} + \cos \frac{2\pi-2C}{3} \right] = 4R \operatorname{sen} \frac{B}{3} \left[ \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi-2C}{3} \right] =$$

$$8R \operatorname{sen} \frac{B}{3} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{C}{3} \right) \cos \left( \frac{\pi}{6} - \frac{C}{3} \right) = 8R \operatorname{sen} \frac{B}{3} \cos \frac{C}{3} \cos \left( \frac{\pi}{6} - \frac{C}{3} \right).$$

Así  $AP = 8R \operatorname{sen} \frac{B}{3} \cos \frac{C}{3} \cos \left( \frac{\pi}{6} - \frac{C}{3} \right)$  (1) y análogamente,

$$AN = 8R \operatorname{sen} \frac{B}{3} \cos \frac{C}{3} \cos \left( \frac{\pi}{6} - \frac{B}{3} \right) \quad (2).$$

El lado  $PN$  puede calcularse aplicando el teorema del coseno al triángulo  $APN$ .

$$PN^2 = AP^2 + AN^2 - 2AP \cdot AN \cos \frac{A}{3} =$$

$$64R^2 \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \left[ \cos^2 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{B}{3} \right) + \cos^2 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{C}{3} \right) - 2 \cos \left( \frac{\pi}{6} - \frac{C}{3} \right) \cos \left( \frac{\pi}{6} - \frac{B}{3} \right) \cos \frac{A}{3} \right] =$$

$$64R^2 \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \left[ \frac{1 + \cos \left( \frac{2\pi}{6} - \frac{2C}{3} \right)}{2} \frac{1 + \cos \left( \frac{2\pi}{6} - \frac{2B}{3} \right)}{2} - \cos \frac{A}{3} \left( \cos \frac{\pi - B - C}{3} + \cos \frac{B - C}{3} \right) \right] =$$

$$64R^2 \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \left[ 1 + \cos \frac{A}{3} \cos \frac{B - C}{3} - \cos^2 \frac{A}{3} - \cos \frac{A}{3} \cos \frac{B - C}{3} \right] =$$

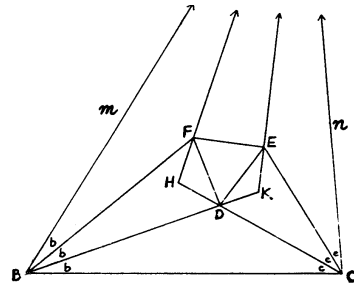
$64R^2 \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \sin^2 \frac{A}{3}$ . De este modo  $PN = 8R \sin \frac{A}{3} \sin \frac{B}{3} \sin \frac{C}{3}$ . Y por simetría en  $A, B, C$   $PN = NM = MP$  y el triángulo  $PNM$  es equilátero.

## DEMOSTRACIÓN DE L. A. GRAHAM

Esta demostración aparece en "Ingenious Mathematical Problems and Methods", Dover Publications, Inc., New York, 1959, pp. 33, 184-185. de L.A. Graham.

Es una de las demostraciones más simples utilizando geometría convencional. Es muy cercana a la prueba de M.T.Naraniengar.

Inicialmente se omite el vértice  $A$  del triángulo dado  $ABC$  y se dibujan sólo los trisectores de los ángulos  $B$  y  $C$ . Se toman  $B = 3b, C = 3c$  y  $A = 3a$ , pues cuando  $A$  se determine será el tercer vértice del triángulo dado. Entonces  $a + b + c = 60^\circ$ . Sea el punto  $D$  intersección de los dos trisectores adyacentes al lado  $BC$  y los puntos  $E$  y  $F$  pertenecientes respectivamente a los otros primeros trisectores de los ángulos  $C$  y  $B$ . Se trazan a continuación  $DF$  y  $FH$  tales que el ángulo  $\angle KDE$  sea igual al ángulo  $\angle HDE = a + c$ . Análogamente se trazan  $DE$  y  $EK$  tales que el ángulo  $\angle KDE = \angle KED = a + b$ . Por tanto el ángulo



$\angle FDE = 360^\circ - (a + 120^\circ) - 2b + c - (a + b) - (a + c) = 60^\circ$  Por otro lado el ángulo  $\angle BDF = 180^\circ - b - (a + c) - (b + c) = a + 60^\circ = 180^\circ - c - (b + c) - (a + b) = \angle CED$ .

$D$  es el punto intersección de las bisectrices del triángulo uno de cuyos lados es  $BC$  y los otros dos están sobre las semirrectas  $BF$  y  $CE$  y por tanto equidista de  $BF$  y  $CE$ . Como  $DF$  y  $DE$  forman ángulos iguales respectivamente con  $BF$  y  $CE$ , entonces  $DE = DF$  y el triángulo  $DEF$  es equilátero.

Resta probar que las semirrectas  $m$  y  $n$ , de vértices  $B$  y  $C$  respectivamente que forman con  $BC$  los ángulos  $3b$  y  $3c$  también respectivamente, junto con las rectas  $HF$  y  $KE$ , convergen a un punto donde forman tres ángulos iguales.

Debido a que los dos triángulos pequeños de base común  $DE$  son isósceles,  $KF$  es bisectriz del ángulo  $K$ ,  $BF$  y  $KF$  son bisectrices interiores del triángulo de lados  $m - BK - KE$  y  $F$  es el incentro de este triángulo. El ángulo

$$\angle BFH = a + 60^\circ - (a + c) = a + b \text{ y } \angle m - KE = 180^\circ - 2b - (180^\circ - 2a - 2b) = 2a.$$

Entonces  $HF$  es la bisectriz de l ángulo  $\angle m - KE$ . Análogamente  $KE$  es l bisectriz del ángulo  $\angle n - HF$ .

CARTA ENVIADA POR EL PROFESOR FRANK MORLEY AL PROFESOR T. HAYASHI “SOBRE LA INTERSECCIÓN DE LOS TRISECTORES DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO”

Querido Profesor Hayashi:

No he publicado el teorema que afirma que las tres intersecciones de los trisectores de los ángulos de un triángulo forman un triángulo equilátero. Este resultado surgió de consideraciones sobre cardioides. Hice observar en “*Transactions of the American Mathematical Society*”, vol. p.115, que ciertas cadenas de teoremas eran ciertas para cualquier número de rectas del plano, cuando se reemplaza cada intersección de las rectas tomadas de dos en dos (1) por el centro de la circunferencia que es tangente a tres de las rectas dadas (2) y por el centro de una cardiode que es tangente a cuatro de las rectas dadas, y así sucesivamente.

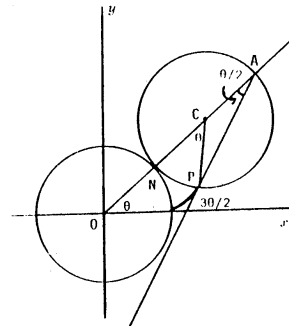
Esto me llevó a considerar las cardioides que son tangentes a tres rectas.

La cardioide viene definida en la circunferencia unidad por la ecuación  $x = 2t - t^2$ ,

donde  $x$  es un número complejo y  $t$  es un número complejo tal que  $|t|=1$ . La tangente en  $t$  es  $x - 3t + 3t^2 - \bar{x}t^3 = 0$ , siendo  $\bar{x}$  el conjugado de  $x$ .

Las tres tangentes desde un punto  $x$ , son entonces tales que  $t_1 t_2 t_3 = \frac{x}{\bar{x}}$ . Si  $\theta_i$  son los ángulos que

forman esas tangentes con cualquier recta fija y  $\phi$  es el ángulo que forma  $x$  con tal recta fija, entonces  $3\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$  (1).



La imagen  $y$  de cualquier punto  $x$  de la tangente es dada por  $y - 3t + 3t^2 - \bar{x}t^3 = 0$ . Así la imagen del centro  $x=0$  es  $y = 3(t - t^2)$ . Por tanto, si  $y = 2pe^{i\omega}$  e  $\bar{y} = 2pe^{-i\omega}$  se tiene  $4p^2 = 9(1-t)\left(1 - \frac{1}{t}\right)$ ,  $e^{2i\omega} = -t^3$ ,  $t + \frac{1}{t} = -2 \cos \frac{2\omega}{3}$  y  $p = 3 \text{sen} \frac{\omega}{3}$  (2), que es la ecuación de la cardioide.

Si  $p_1, p_2$  y  $p_3$  son las rectas perpendiculares trazadas desde el centro de la cardioide a las tres rectas tangentes a la misma y  $\omega_1, \omega_2$  y  $\omega_3$  son los ángulos de esas

perpendiculares, ya que  $\sum_3 \text{sen} \frac{\omega_1}{3} \text{sen} \frac{\omega_2 - \omega_3}{3} = 0$ .

Entonces tenemos que  $\sum_3 p_1 \text{sen} \frac{\omega_2 - \omega_3}{3} = 0$  (3)



Reemplazando  $\omega_2 - \omega_3$  por el ángulo  $A_1$  del triángulo de las tangentes y teniendo en cuenta que en (3) los ángulos deben tener una suma congruente a 0, obtenemos para el lugar geométrico de los centros, nueve rectas tales que:

$$p_1 \operatorname{sen} \frac{\pi - A_1}{3} + p_2 \operatorname{sen} \frac{\pi - A_2}{3} + p_3 \operatorname{sen} \frac{-\pi - A_3}{3} = 0,$$

$$p_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi - A_1}{3} + p_2 \operatorname{sen} \frac{\pi - A_2}{3} + p_3 \operatorname{sen} \frac{-2\pi - A_3}{3} = 0.$$

Pero de (1) considerando aquellas cardioides cuyos centros están a una distancia *enorme* (tal que el triángulo se comporte como un punto), vemos que las nueve rectas sólo tienen tres direcciones dadas por  $3\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ .

Hay de este modo tres conjuntos de tres rectas paralelas formando triángulos equiláteros. El lugar geométrico de los centros cambia de un conjunto de rectas a otro cuando una de las rectas es una tangente doble.

Consideremos en particular las cardioides que están dentro del triángulo. Sea  $O_1$  el centro de una cardioides con tangente doble  $A_2A_3$ . De (1) tenemos que:

$$\angle A_3A_2O_1 = \frac{A_2}{3} \quad \text{y} \quad \angle O_1A_3A_2 = \frac{A_3}{3}, \quad \text{y hemos visto que las tres rectas } O_1O_2, O_2O_3 \text{ y } O_3O_1 \text{ forman un triángulo equilátero.}$$

Este ha sido el argumento. La verificación es naturalmente una labor mucho más simple. Si piensa que merece la pena publicarlo estaré muy complacido de que aparezca en una revista japonesa.

Si este resultado llega a ser de su interés estaré contento de enviarle una copia, con correcciones por el uso de "direcciones de rectas" que no lo expreso de forma clara.

Con mi más alta consideración,

Sinceramente,

(Firmado)

Profesor Frank Morley

#### OBSERVACIONES A LA DEMOSTRACIÓN DE MORLEY DE SU TEOREMA.

Por Dan Pedoe, Universidad de Minnesota.

Frank Morley fue un matemático notable, pero no es fácil encontrar mucha gente que pueda seguir sus razonamientos. Su obra, *Inversive Geometry*, (Frank Morley y P. V. Morley, 1954) contiene ideas profundas, pero yo, en algún momento la he encontrado casi incomprensible. Las observaciones siguientes a la demostración de su célebre teorema son tentativas iniciales para dilucidar su trabajo.

En su artículo, escrito para una revista japonesa dedicada a la educación secundaria, Morley cambia de notación un número significativo de veces. Usa primero  $\theta$  para el ángulo que forma la tangente a la cardioides con el eje  $x$ , luego lo cambia por  $\omega$ , y después vuelve a utilizar de nuevo  $\omega$  para el ángulo que forma la perpendicular a la tangente desde el centro de la cardioides con el eje  $x$ . Por mi parte usaré la notación a la que estoy habituado y posteriormente identificaré mis resultados con los de Morley. Consideraremos el primer enunciado:

“La cardioide se transforma en la circunferencia unidad por la ecuación  $x = 2t - t^2$ , donde  $x$  es un número complejo y  $t$  es un número complejo tal que  $|t|=1$ ”.

Suponemos que la curva cardioide se traza por un punto  $P$  fijo de una circunferencia de radio unidad que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia unidad fija. Se toma el centro  $O$  de la circunferencia fija como el origen de coordenadas y es llamado el centro de la cardioide. Si  $N$  es el punto de tangencia de las dos circunferencias y  $ON$  corta de nuevo a la circunferencia que rueda en  $A$ , entonces la tangente en el punto  $P$  a la cardioide es perpendicular a  $NP$  y es por tanto  $PA$ . Si  $\theta$  es el ángulo  $NOX$  (siendo  $OX$  el eje de abscisas), las coordenadas del punto  $P$ ;  $(x_p, y_p)$  son

$$\begin{cases} x_p = 2 \cos \theta - \cos 2\theta \\ y_p = 2 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} 2\theta \end{cases}, \text{ de tal forma que:}$$

$x = x_p + iy_p = 2(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) - (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^2 = 2t - t^2$ , con  $t = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$  y por tanto  $|t|=1$ .

La tangente en  $P$  a la cardioide es la recta  $PA$  y el afijo de  $A$  es  $3t$ . por tanto la

ecuación de la tangente es: 
$$\begin{vmatrix} X & \bar{X} & 1 \\ 3t & 3\bar{t} & 1 \\ 2t - t^2 & 2\bar{t} - 3\bar{t}^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
  $X$  es cualquier punto de la recta

tangente a  $x = 2t - t^2$ . (Morley utiliza el mismo  $x$  para ambos puntos)

Después de desarrollar el determinante y usar la ecuación  $t\bar{t}=1$ , que conduce a  $t(\bar{t}+1)=1+t$  y a  $\bar{t}(t+1)=1+\bar{t}$ , se obtiene la ecuación  $X - 3t + 3t^2 - \bar{X}t^3 = 0$ .

Las tres tangentes a la cardioide desde un punto  $X$  corresponden a los puntos  $t_1, t_2, t_3$

que están en la circunferencia unidad y cumplen que  $t_1 t_2 t_3 = \frac{X}{\bar{X}}$ . Por tanto si

$X = r(\cos 2\phi + i \operatorname{sen} 2\phi)$ , entonces  $t_1 t_2 t_3 = \cos 2\phi + i \operatorname{sen} 2\phi$ , y por tanto  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\phi$ .

Si  $\psi$  es el ángulo formado por la recta tangente en  $P$ ,  $PA$ , con el eje de abscisas, como

$\angle OCP = \theta$  y por tanto  $\angle OAP = \frac{\theta}{2}$ , entonces  $\psi = \frac{3\theta}{2}$ . Y los ángulos  $\psi_i$  formados por

las tangentes a la cardioide que pasan por el punto, con el eje de abscisas cumplen que

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 3\phi. \text{ Esta es la ecuación fundamental de Morley (1).}$$

Si ahora volvemos a la carta de Morley y consideramos el lugar geométrico de los centros de las cardioides que son tangentes a los lados de un triángulo  $ABC$  dado, entonces probaremos que *los puntos en el infinito de este lugar geométrico coinciden con los puntos en el infinito de los lados de un determinado triángulo equilátero.*

Sea  $O$  el centro de una cardioide tangente a los lados de un triángulo  $ABC$  que está a una “gran distancia” del triángulo y sea  $X$  un punto “cercano” al triángulo. Las tangentes desde  $X$  a esta “enorme” cardioide deben ser casi paralelas a los lados del triángulo  $ABC$  (“tal que el triángulo se comporte como un punto”). Por tanto en la ecuación (1), el ángulo  $\phi$  que determina la dirección de  $OX$  es una tercera parte de la suma de las  $\psi_i$ , donde las  $\psi_i$  corresponden a los lados del triángulo  $ABC$ .

Como cada  $\psi_i$  se toma módulo  $2\pi$ , y se dividen por 3, se obtienen tres direcciones

para  $\phi$  que difieren en  $\frac{2\pi}{3}$ .

Si el lugar geométrico de los centros de las cardioides está constituido por rectas, estas deben formar conjuntos que son paralelos a los lados de un determinado triángulo equilátero.

Para demostrar que este lugar geométrico está constituido por rectas Morley obtiene la ecuación  $(p, \psi)$  de una cardioide. Si  $OQ$  es la perpendicular de  $O$  a la recta  $AP$ ,

$$\text{entonces } p = OQ = OA \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = 3 \operatorname{sen} \frac{\psi}{3}. \quad (2)$$

Morley hace notar que esta ecuación puede ser hallada directamente. ¡A continuación Morley realiza una manipulación muy inteligente! Desea pasar de la ecuación (2) a la ecuación trilineal del lugar geométrico de los centros.

Fácilmente se verifica que para  $P, Q, R$  cualesquiera

$$\operatorname{sen} P \operatorname{sen}(Q - R) + \operatorname{sen} Q \operatorname{sen}(R - P) + \operatorname{sen} R \operatorname{sen}(P - Q) = 0.$$

Y así  $\operatorname{sen} \frac{\psi_1}{3} \operatorname{sen} \frac{\psi_2 - \psi_3}{3} + \dots + \dots = 0$ . Usando (2), lo anterior se puede escribir del

$$\text{modo siguiente } p_1 \operatorname{sen} \frac{\psi_2 - \psi_3}{3} + p_2 \operatorname{sen} \frac{\psi_3 - \psi_1}{3} + p_3 \operatorname{sen} \frac{\psi_1 - \psi_2}{3} = 0 \quad (3), \text{ donde}$$

$p_1, p_2, p_3$  son las perpendiculares del centro de la cardioide a las tres tangentes que forman ángulos  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  con el eje de abscisas.

Esas perpendiculares  $p_i$  se denominan *coordenadas trilineales* (véase nota al final) de

$O$  respecto al triángulo  $ABC$  y los valores  $\frac{\psi_i - \psi_j}{3}$  están relacionados con los ángulos del triángulo.

La ecuación fundamental que conecta las coordenadas trilineales es  $ap_1 + bp_2 + cp_3 = 2\Delta$ , donde  $a, b, c$  son los lados del triángulo y  $\Delta$  es su área.

La ecuación (3), en coordenadas trilineales, es la de una recta. Por tanto Morley ha probado que el lugar geométrico de los centros de las cardioides que son tangentes a los lados de un triángulo dado es un conjunto de rectas.

Morley, después de establecer la ecuación (3) intercambia el ángulo que forman las tangentes con el eje de abscisas con los ángulos formados por las respectivas perpendiculares con el eje de abscisas “...y teniendo en cuenta que en (3) los ángulos deben tener una suma congruente a 0, ...” (que no es demasiado claro), Morley obtiene nueve rectas para el lugar geométrico de los centros de las cardioides.

Verificar, en coordenadas trilineales, que esas nueve rectas son paralelas en conjuntos de tres sería una tarea formidable y ardua, pues las rectas son paralelas en estas coordenadas trilineales si intersectan a la recta del infinito  $ap_1 + bp_2 + cp_3 = 0$ . Morley supera esta dificultad utilizando la ecuación (1) de una forma notable.

Por último ¿Cómo se encaja todo esto con los trisectores de los ángulos de un triángulo? Una vez más Morley establece una afirmación geométrica brillante: “*El lugar geométrico de los centros cambia de un conjunto de rectas a otro cuando una de las rectas es una tangente doble.*”

Utilizando la ecuación (1) de nuevo Morley demuestra que los vértices de su triángulo equilátero son las intersecciones de los trisectores de los ángulos del triángulo  $ABC$ .

Al final añade: “*La verificación es naturalmente una labor mucho más simple.*”

NOTA: Todo lo que se requiere decir sobre las coordenadas trilineales es que no es difícil probar que una ecuación lineal en  $(p_1, p_2, p_3)$  representa una recta. En efecto, si las ecuaciones de los lados de un triángulo vienen dadas en su forma normal

$x \cos \alpha_i + y \operatorname{sen} \alpha_i - q_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$ , se puede tomar  $p_i = x_p \cos \alpha_i + y_p \operatorname{sen} \alpha_i - q_i$  para las coordenadas trilineales  $(p_1, p_2, p_3)$  de  $P = (x_p, y_p)$ , y por tanto una ecuación lineal homogénea en las coordenadas trilineales  $(p_1, p_2, p_3)$  da lugar a una ecuación lineal en las coordenadas  $(x_p, y_p)$ .

## COMENTARIOS SOBRE LAS DIVERSAS DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DE MORLEY DE LEON BANKOFF

Una clasificación preliminar de las demostraciones a este teorema establece dos categorías, directa e indirecta. Aquí se usa el término indirecto no en el sentido de reducción al absurdo sino en el sentido de invertir la sucesión de pasos desde la hipótesis a la conclusión. Ejemplos de pruebas indirectas son las de Naraniengar, Dobbs y Child, por citar unas pocas. Estas pruebas empiezan con el conocimiento sobreañadido de que el triángulo interno que se forma es equilátero, y con las construcciones geométricas basadas también en saber el valor de los ángulos relacionados con el triángulo interior. Dirigen la demostración a que ciertas semirrectas convergan para formar el triángulo exterior. Este procedimiento no es esencialmente una demostración del teorema de Morley, sino de su recíproco. El establecer fácilmente el recíproco no proporciona una prueba legítima del teorema principal.

Entre las pruebas directas, la preponderancia de las publicadas son trigonométricas. La trigonometría es la herramienta ideal para manejar submúltiplos de ángulos. Teóricamente se debería ser capaz de convertir cualquier argumento trigonométrico en uno que sea de geometría sintética, pero en la práctica esto seguramente daría lugar a una demostración tediosa. Hay suficientes variaciones en las pruebas trigonométricas. Algunas directamente calculan las longitudes de los lados del triángulo interior (Loria, Cocea,...), mientras otras van al cálculo de los ángulos que están en las tres intersecciones pertinentes, que determinan el triángulo de Morley obteniendo  $60^\circ$  para cada uno de sus ángulos interiores (Satyanarayana, ...).

Se han construido demostraciones geométricas directas y excelentes usando la razón doble, los conjugados isogonales, el teorema de Desargues, el teorema de Menéalo y números complejos (Robson, Thébault,...). Muchos matemáticos encuentran estas pruebas particularmente atractivas porque combinan concisión y precisión.

*La demostración ideal, todavía por descubrir, debería ser la que utilice la geometría sintética, la que siga un camino directo de la hipótesis a la conclusión, la que sea sencilla de entender y la que no sea demasiado larga.*

NOTA: El profesor Francisco Bellot, recomienda para ampliar la exposición y el desarrollo histórico de este teorema el libro titulado “*Le Théorème de Morley*” de André Viricel, publicado en 1993 por *L’Association pour le Développement de la Culture Scientifique (A.D.C.S.)*. En él se ofrece una extensa gama de diferentes demostraciones, desde la geometría clásica (Ehrhart, Sasportès, Niewenglowski, Bricard, Frasnay, Glanville-Taylor, Viricel), la geometría analítica (Viricel), la trigonometría (Bouteloup, Commeau) hasta los números complejos (Hoffmann), además de encontrarse los trabajos sobre este teorema de Lebesgue y de Gambier.

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

