PARES DE TRIÁNGULOS HERONIANOS CON ÁREAS Y PERÍMETROS IGUALES : UNA DESCRIPCIÓN

K.R.S.SASTRY

Introducción

Sea ABC un triángulo. Designamos los lados o sus longitudes mediante $a = BC, b = CA, c = AB$. Si $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, entonces la fórmula de Herón para su área es

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,. \qquad (*)$$

Triángulos rectángulos con lados y área enteros, como $(3,4,5;6)$ fueron conocidos por muchas civilizaciones antes de la época de Herón. Sin embargo, el descubrimiento del triángulo $(13,14,15;94)$ se le atribuye a él. Este triángulo **no** es rectángulo, pero sus lados y el área son enteros. Como homenaje a su significativo descubrimiento, llamamos a un triángulo ABC un **triángulo heroniano** si a,b,c y Δ son enteros. Hay muchas fórmulas de las que podemos calcular los lados y el área de cualquier número de triángulos heronianos. Cada fórmula nos ayuda a resolver determinado tipo de problema relacionado con ellos. Las referencias situadas al final del artículo contienen diversas fuentes relativas a los triángulos heronianos. Nuestro propósito actual es obtener una familia específica de triángulos heronianos para determinar infinitos pares de esos triángulos cuyas áreas y perímetros son iguales en cada par.

Determinación de la familia de triángulos heronianos

Nombramos los vértices de un triángulo ABC de manera que $BC > AB$. Sea I_C el exincentro opuesto al vértice C. I_C es el punto de intersección de las bisectrices exteriores de los ángulos $\widehat{CAB}$ y $\widehat{ABC}$ y la bisectriz interior de $\widehat{BCA}$. El teorema de la bisectriz dice que una bisectriz interior o exterior divide al lado opuesto en la razón de los otros dos lados.Si D es el punto de intersección de la prolongación del lado AC con la bisectriz exterior del ángulo $\widehat{B}$, aplicando este teorema al triángulo DBC obtenemos

$$\frac{BI_C}{I_CD} = \frac{BC}{CD},$$

y aplicándolo al triángulo ADB obtenemos

$$\frac{BI_C}{I_CD} = \frac{AB}{AD}.$$

De aquí resulta

$$\frac{BI_C}{I_CD} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC-AB}{CD-AD} = \frac{BC-AB}{AC} = \frac{a-c}{b}. \qquad (1)$$

En la anterior cadena de igualdades (1) hemos usado una propiedad de las razones iguales:
Si $\lambda = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, entonces $\lambda = \frac{e-g}{f-h}$ porque $e = \lambda f$ y $g = \lambda h$.

Si el triángulo ABC ha de ser heroniano, entonces a,b,c deben ser enteros positivos. Por lo tanto la razón $(a-c)/b$ será un número racional positivo , digamos v/u, con $mcd(u,v) = 1, u > v$, y de tal manera que el área de ABC sea también un entero positivo. Para entender mejor el proceso de determinación vamos a asignar los valores específicos $u = 5, v = 3$. Entonces $(a-c)/b = 3/5$. Esto implica que existe un entero positivo k tal que $a-c = 3k, b = 5k$. Por lo tanto los lados de

ABC se pueden tomar como

$$a = c + 3k, \quad b = 5k, \quad c = c \qquad (2).$$

Ahora debemos determinar los valores de los parámetros c, k para que el área sea un entero. Para ello calculamos $s = c + 4k$ y usamos la fórmula de Herón :

$$\Delta = \sqrt{(c + 4k)(c - k)(k)(4k)} = 2k\sqrt{(c + 4k)(c - k)}\,.$$

Esto nos indica que $(c + 4k)(c - k) = \mu^2$, un cuadrado perfecto. Luego existe un número racional m/n tal que

$$c + 4k = \frac{m}{n}\mu \ \text{ y } c - k = \frac{n}{m}\mu.$$

Se invita al lector a resolver el anterior sistema de ecuaciones en c y k para obtener

$$c = \frac{m^2 + 4n^2}{5mn}\mu, \quad k = \frac{m^2 - n^2}{5mn}\mu, \ \text{ es decir}$$
$$\frac{c}{m^2 + 4n^2} = \frac{\mu}{5mn} = \frac{k}{m^2 - n^2} = v.$$

La constante de proporcionalidad v multiplica los lados para dar un triángulo semejante al primero; por lo tanto la ignoramos y ponemos

$$c = m^2 + 4n^2, \ \ \mu = 5mn, \ \ k = m^2 - n^2, \ \ m > n.$$

Sustituyendo ahora los valores de c y k en (2) nos dan los valores parametrizados de los lados, el perímetro y el área:

$$\left.\begin{array}{c}(a,b,c) = (4m^2 + n^2, 5(m^2 - n^2), m^2 + 4n^2) \\ P = 10m^2, \quad \Delta = 10mn(m^2 - n^2)\end{array}\right\} \qquad (3).$$

Las fórmulas (3) generan una familia infinita de triángulos heronianos. Si hacemos, por ejemplo, $m = 5, n = 1$ en (3) obtenemos el triángulo heroniano

$$(a,b,c) = (101, 120, 29), P = 250, \Delta = 1200.$$

El proceso anterior demuestra que si tomamos (1), la razón $(a - c)/b = v/u$, entonces se puede determinar el conjunto completo de triángulos heronianos. Sin embargo, se deja al lector interesado la comprobación porque no es necesario para nuestros propósitos. En vez de eso, tomamos en (1) la razón

$$\frac{a - c}{b} = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}$$

y procedemos exactamente igual que antes. Se obtiene la siguiente familia de triángulos heronianos, más general y más útil (los cálculos se dejan al lector) :

$$\left.\begin{array}{c}(a,b,c) = (m^2u^2 + n^2v^2, (m^2 - n^2)(u^2 + v^2), n^2u^2 + m^2v^2) \\ P = 2m^2(u^2 + v^2), \Delta = mn(m^2 - n^2)uv(u^2 + v^2)\end{array}\right\} \qquad (4).$$

El lector comprobará que cuando $u = 2, v = 1$ las expresiones (4) dan las expresiones (3). Para obtener un triángulo heroniano particular en (4) debemos elegir m, n, u, v naturales con $m > n, u > v$. Por ejemplo, para $m = 3, n = 2, u = 2, v = 1$ resulta el triángulo $(a,b,c) = (40, 25, 25)$, con $P = 90, \Delta = 300$. Incidentalmente observamos que $mcd(a,b,c) = 5$. Usualmente se eligen los lados de manera que $mcd(a,b,c) = 1$. Luego dividiendo los lados por 5 resulta el triángulo heroniano isósceles $(8, 5, 5)$ con $P = 18, \Delta = 12$. Sin embargo, en la solución de ciertos problemas no dividiremos los lados por su máximo común divisor. La razón aparecerá en la preparación de las tablas 1 y 2 de la sección siguiente, que mostrará cómo deducir pares de triángulos heronianos a partir de (3), que tengan igual perímetro y área.

Solución del problema

El problema de hallar pares de triángulos isósceles heronianos con el mismo perímetro y la misma área ha sido resuelto por completo. Hay distintas soluciones en las referencias $[2, 4, 8]$ que se dan al final. Mencionemos un ejemplo de uno de esos pares : $(29, 29, 40)$ y $(37, 37, 24)$. Ambos tienen perímetro 98 y área 420. Por lo tanto, en esta sección determinaremos pares de triángulos no isósceles, heronianos, con el mismo perímetro y la misma área. Nuestro proceso de determinación precisa del resultado siguiente:

Sean p **y** q **dos números naturales primos entre sí**, **con** $p > q$. **Si** $a = p^2 + pq + q^2, b = 2pq + q^2, c = p^2 - q^2$, **entonces el triángulo ABC tiene su ángulo A de 120º**. (5 y 6)

El resultado anterior es muy fácil de justificar con el teorema del coseno, puesto que

$$\widehat{A} = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + bc.$$

Entonces, para determinar el par deseado de triángulos heronianos, primero usamos las expresiones (3) y luego (4) :

A partir de (3), un par de triángulos heronianos generales es de la forma

$$(a_1, b_1, c_1) = (4m_1^2 + n_1^2, 5(m_1^2 - n_1^2), m_1^2 + 4n_1^2)$$
$$P_1 = 10m_1^2, \Delta_1 = 10m_1n_1(m_1^2 - n_1^2)$$

y

$$(a_2, b_2, c_2) = (4m_2^2 + n_2^2, 5(m_2^2 - n_2^2), m_2^2 + 4n_2^2)$$
$$P_2 = 10m_2^2, \Delta_2 = 10m_2n_2(m_2^2 - n_2^2)$$

Esos dos triángulos tendrán el mismo perímetro si $P_1 = P_2$. Esto es,

$$10m_1^2 = 10m_2^2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 = m, \text{ digamos.} \quad (7)$$

Los dos triángulos tendrán la misma área si $\Delta_1 = \Delta_2$, es decir

$$10m_1n_1(m_1^2 - n_1^2) = 10m_2n_2(m_2^2 - n_2^2).$$

Si aquí ponemos el valor hallado en (7) obtenemos

$$n_1(m_1^2 - n_1^2) = n_2(m_2^2 - n_2^2).$$

Multiplicando y reordenando los términos ,

$$(n_1 - n_2)m^2 = n_1^3 - n_2^3 = (n_1 - n_2)(n_1^2 + n_1n_2 + n_2^2).$$

La ecuación anterior implica que

$$i) \quad n_1 - n_2 = 0, \text{ en cuyo caso los triángulos no son distintos;}$$

por lo tanto este caso lo descartamos y consideramos la siguiente posibilidad:

$$ii) \quad m^2 = n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2.$$

Esta ecuación es la misma que encontramos en (6), con $m = a, n_1 = b, n_2 = c$. Luego de (5) tomamos

$$m = p^2 + pq + q^2, n_1 = 2pq + q^2, n_2 = p^2 - q^2, p > q \qquad (8).$$

Dejamos al lector la comprobación de que el triángulo heroniano generado por la pareja (m, n_1) tiene el mismo perímetro y área que el generado por (m, n_2). Por lo tanto tenemos el siguiente algoritmo (9):

Etapa I: Sustituímos en (8) p y q por números naturales para calcular los valores numéricos de m, n_1 y n_2.

Etapa II: Usamos los valores numéricos de m, n_1 para calcular los lados a_1, b_1, c_1, el perímetro P_1 y el área Δ_1.

Etapa III: Ahora repetimos los cálculos con m, n_2 para obtener $a_2, b_2, c_2, P_2, \Delta_2$.

Los dos triángulos heronianos así obtenidos tienen la misma área y el mismo perímetro.

La siguiente Tabla 1 ha sido preparada usando (9) :

p	q	m	n_1	n_2	(a_1, b_1, c_1)	(a_2, b_2, c_2)	P	Δ
2	1	7	5	3	$(221, 120, 149)$	$(205, 200, 85)$	490	8400
3	1	13	7	8	$(725, 600, 365)$ $(145, 120, 73)$	$(740, 525, 425)$ $(148, 105, 85)$	338	4368
3	2	19	16	5	$(1700, 525, 1385)$	$(1469, 1680, 461)$	3610	319200
5	1	31	11	24	$(3965, 4200, 1445)$ $(793, 840, 289)$	$(4420, 1925, 3265)$ $(884, 385, 653)$	1922	114576

En la preparación de la Tabla 1, si $mcd(a_1, b_1, c_1) = mcd(a_2, b_2, c_2)$, o al menos uno de ellos divide al otro, entonces hemos dividido los lados de ambos triángulos por el común mcd (o por el más pequeño). Esto da valores menores para los lados, el perímetro y el área.

Si $mcd(a, b, c) = 1$, el triángulo se llama **triángulo primitivo**. En este sentido, algunos pares solución están formados por triángulos primitivos.

Las expresiones contenidas en (4) pueden usarse para generar una **familia infinita** de pares de triángulos heronianos del tipo deseado. Obviamente esto es más ventajoso. Para verlo primero determinamos m, n_1, n_2 en (8). Por ejemplo, $p = 2, q = 1$ da $m = 7, n_1 = 5, n_2 = 3$. A continuación, como en las etapas II y III del algoritmo (9), encontramos la familia infinita de pares de triángulos heronianos:

$$(a_1, b_1, c_1) = (49u^2 + 25v^2, 24(u^2 + v^2), 25u^2 + 49v^2)$$
$$(a_2, b_2, c_2) = (49u^2 + 9v^2, 40(u^2 + v^2), 9u^2 + 49v^2)$$
$$P_1 = P_2 = P = 98(u^2 + v^2), \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta = 840uv(u^2 + v^2)$$

Dándole a los parámetros u, v valores naturales formamos la siguiente Tabla 2 :

u	v	(a_1, b_1, c_1)	(a_2, b_2, c_2)	P	Δ
2	1	$(221, 120, 149)$	$(205, 200, 85)$	490	8400
3	1	$(466, 240, 274)$ $(233, 120, 137)$	$(450, 400, 130)$ $(225, 200, 65)$	490	6300
3	2	$(541, 312, 421)$	$(477, 520, 277)$	1274	65520
4	1	$(809, 408, 449)$	$(793, 680, 193)$	1666	57120
4	3	$(1009, 600, 841)$	$(865, 1000, 585)$	2450	252000
5	1	$(1250, 624, 674)$ $(625, 312, 337)$	$(1234, 1040, 274)$ $(617, 520, 137)$	1274	27300
5	2	$(1325, 696, 821)$	$(1261, 1160, 421)$	2842	243600
5	3	$(1450, 816, 1066)$ $(725, 408, 533)$	$(1306, 1360, 666)$ $(653, 680, 333)$	1666	107100
5	4	$(1625, 984, 1409)$	$(1369, 1640, 1009)$	4018	688800

Análogamente, $p = 3, q = 1$ en (8) da $m = 13, n_1 = 7, n_2 = 8$ y usando esto en (4) da otra familia infinita de pares de triángulos heronianos del tipo deseado:

$$(a_1, b_1, c_1) = (169u^2 + 49v^2, 120(u^2 + v^2), 49u^2 + 169v^2)$$
$$(a_2, b_2, c_2) = (169u^2 + 64v^2, 105(u^2 + v^2), 64u^2 + 169v^2)$$
$$P_1 = P_2 = P = 338(u^2 + v^2), \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta = 10920uv(u^2 + v^2)$$

$p = 3, q = 2, m = 19, n_1 = 16, n_2 = 5$ da otra familia:

$$(a_1, b_1, c_1) = (361u^2 + 256v^2, 105(u^2 + v^2), 256u^2 + 361v^2)$$
$$(a_2, b_2, c_2) = (361u^2 + 25v^2, 336(u^2 + v^2), 25u^2 + 361v^2),$$

y así sucesivamente.

Conclusión

Aun cuando las expresiones (4) generan una infinidad de familias infinitas de pares de triángulos heronianos con la misma área y el mismo perímetro, eso no significa que el problema esté completamente resuelto. La solución completa del problema básico: *Determinar los pares de triángulos heronianos que tienen el mismo perímetro y la misma suma* no se ha conseguido todavía (al menos por lo que yo conozco). Por lo tanto, pedimos al lector que intente una solución más completa. Con lo expuesto en este artículo, es posible plantear y resolver un cierto número de problemas interesantes. Por ejemplo, las fórmulas (3) demuestran que el perímetro $P = 10m^2$ no depende de n. Por lo tanto nos permite encontrar **cualquier** número finito de triángulos primitivos heronianos que tienen todos el mismo perímetro (**pero no la misma área**). Sin esa fórmula, este sería un problema difícil de resolver. Invitamos al lector a resolver los siguientes problemas y a plantear algunos nuevos:

1.-Hallar a) cuatro, b) diez triángulos heronianos primitivos distintos que tengan el mismo perímetro.

2.- a) Hallar tres triángulos heronianos primitivos tales que el perímetro de uno de ellos sea la suma de los perímetros de los otros dos.

b) Hallar cuatro triángulos heronianos primitivos tales que el perímetro de uno de ellos sea la suma de los otros tres perímetros.

c) Sea k un número natural. ¿Es posible encontrar k triángulos heronianos primitivos tales que el perímetro de uno de ellos ea la suma de los otros $k-1$ perímetros?

3.- Hallar tres triángulos heronianos primitivos cuyos perímetros estén en progresión aritmética.

4.- Probar o refutar la existencia de tres triángulos heronianos primitivos con el mismo perímetro y la misma área.

Referencias

[1]. J.R.Carlson, *Determination of Heronian triangles*; *Fibonacci Quarterly*, 8 (1970), *pp*.499-506, 551.

[2]. L.E. Dickson, *History of the Theory of numbers*, *vol.II*, *Chelsea*, *New York*, *NY*(1971), *pp*.171-201.

[3]. K.R.S.Sastry, *Heron triangles*: *a new perspective*, *Aust.Math*. *Soc*. *Gazette*, 26(1999), *pp*.160-168.

[4]. K.R.S. Sastry, *Pythagorean triple problems*, *Math*. *and Comput*. *Edu*., 28(1994), *pp*.320-331.

[5]. K.R.S.Sastry, *Heron problems*, *Math*. *and Comput*. *Edu*., 29 (1995), *pp*.192-202.

[6]. K.R.S. Sastry, *A Heron Difference*, *Crux Mathematicorum with Math*. *Mayhem*, 27 (2001), *pp*.22-26.

[7]. D. Singmaster, *Some corrections to Carlson's "Detrmination of Heronian triangles*", *Fibonacci Quarterly*, 11(1973), *pp*. 157-158.

[8]. P. Yiu, *Isoscell triangles equal in perimeter and area*, *Missouri J. Math*. *Sci*., 10 (1998), *pp*.106-111.

K.R.S. Sastry

Jeevan Sandhya, Doddakalsandra Post, Raghuvana Halli, Bangalore, 560 062, India.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI