TRIÁNGULOS ESPECIALES

Francisco Bellot Rosado

Introducción

Joseph Neuberg, Profesor Emérito de la Universidad de Lieja, publicó en las *Memoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, *vol*. 12 (1924), una **Bibliographie des triangles spéciaux**. En ella se recogen 50 casos de triángulos entre cuyos elementos (lados, ángulos o ambas cosas) existe una determinada relación. Estos son los llamados **triángulos especiales** en la Geometría del Triángulo, que tuvo un enorme impulso en los años finales del siglo XIX, y que en la actualidad también es motivo de investigación : basta consultar, por ejemplo, la revista digital *Forum Geometricorum* en Internet, que comenzó a aparecer en la red en 2001.

Muchas de las citas de Neuberg son notas suyas, publicadas en la revista belga *Mathesis* desde finales del siglo XIX. La coincidencia, en este caso afortunada, de tener en mi Biblioteca un número bastante considerable de ejemplares de *Mathesis* me permite ”buscar en las fuentes”, como suele decirse, para encontrar otras propiedades de algunos de estos triángulos especiales, que iremos presentando en los números de la *Revista Escolar de la OIM*. Otras buenas fuentes de información son las colecciones de problemas del *American Mathematical Monthly*, y las de *Crux Mathematicorum*, *Mathematics Magazine y College Mathematics Journal*.

Por otra parte, cuando en una desigualdad triangular se estudian los casos de igualdad, se puede obtener una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea, pongamos por caso, equilátero, isósceles, acutángulo, etc. Como regla general no trataremos aquí estos casos - sería demasiado prolijo - y remitimos al lector a las dos publicaciones punteras en este campo: la conocida como ”Biblia de Bottema” : Bottema - Djordjevic - Janic - Mitrinovic - Vasic, *Geometric Inequalities*, *Wolters-Noordhoof Publishing*, *Groningen* 1969 ; y su exhaustiva secuela: Mitrinovic - Pêcaric - Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, *Kluwer Academic Publishers*, *Dordrecht* 1989.

Triángulos especiales I

I.1 Triángulos isósceles y seudo-isósceles

En 1840, C.L.Lehmus(1780-1863), profesor en Berlín, escribió a Steiner pidiéndole una demostración ”puramente geométrica” de la solución al siguiente problema :

Si un triángulo tiene dos bisectrices iguales, ¿es isósceles?

Algún tiempo después, Steiner estudió los casos de las bisectrices interiores y exteriores y demostró el que se conoce como **Teorema de Steiner-Lehmus** : *Si las bisectrices interiores de un triángulo son iguales*, *el triángulo es isósceles*.

Podemos dar una demostración directa de este resultado. Mediante el teorema de Stewart, el cuadrado de la longitud de una bisectriz interior se expresa como

$$w_b^2 = ca\left[1 - \left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right]$$

así que igualando esta expresión a

$$w_c^2 = ab\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]$$

se obtiene

$$a(a+b+c)[(a+b+c)(a^2+bc)+2abc](b-c) = 0,$$

así que es claro que $b = c$ y el triángulo es isósceles.■

En *Crux Mathematicorum*, 1976, *p*.19-24 se publica un excelente artículo sobre el teorema de Steiner - Lehmus, con numerosas referencias, por Léo Sauvé, entonces editor de la revista, cuando todavía tenía el título de *Eureka*.

Igualmente natural es preguntarse qué ocurrirá si dos simedianas son iguales. Ya Lemoine en *Mathesis* 2 demuestra que una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea isósceles es que tenga dos simedianas iguales. La relación entre la longitud de la mediana desde A y la simediana desde A está dada por

$$s_a = \frac{2bc}{b^2+c^2} m_a;$$

por su parte, la igualdad $s_b = s_c$ se traduce en la igualdad

$$\frac{c^2a^2}{(c^2+a^2)^2} \cdot [2(c^2+a^2)-b^2] = \frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} \cdot [2(a^2+b^2)-c^2]$$

que puede escribirse en la forma

$$(c^2-b^2)[2a^2(a^2+c^2)(a^2+b^2)+b^2c^2(2a^2+b^2+c^2)] = 0,$$

de donde se deduce la conclusión. ■

Enumeramos ahora, sin demostraciones, pero dando las referencias oportunas, algunas condiciones para que un triángulo sea isósceles :

Problema 1:*En el triángulo ABC, sea AD la mediana. Probar que si los radios de los círculos inscritos en ABD y ACD son iguales, entonces AB = AC.* (*Mircea Becheanu, Gazeta Matematica* 9/1996)

Problema 2: *Caracterizar los triángulos en los que dos de los centros de los círculos exinscritos están en una elipse cuyos focos son el incentro y el centro del círculo de los* 9 *puntos*. (*C.Popescu, Gazeta matematica* 2/1980)

Problema 3:*En el triángulo ABC, las bisectrices interiores de A y B cortan a los lados opuestos en D y E, respectivamente. Probar que si DE divide a los ángulos* $\widehat{CDA}$ *y* $\widehat{CEB}$ *en la misma proporción, entonces CA = CB.* (*A.M.Monthly* 1934, *p*.527)

Problema 4: *Si desde los pies de las bisectrices interiores de los ángulos de un triángulo se trazan perpendiculares a los respectivos lados, y son concurrentes, entonces el triángulo es isósceles*. (*V.Thébault*; *A.M.Monthly* 1939, *p*.513)

Si AD,BE,CF son bisectrices interiores, y es $BD \cdot CE = DC \cdot BF$, *entonces el triángulo es isósceles* (*R.Izard, Dallas*; *prob*.1132 *a*), *Mathematics Magazine*, *enero* 1983).

Problema 5: *Si la mediana y la bisectriz interior relativas a un mismo véertice son iguales, el triángulo es isósceles. ¿Qué ocurre si se sustituye la bisectriz interior por la exterior*? (*V.Thébault, Mathesis* 1958).

Problema 6: *La condición necesaria y suficiente para que en un triángulo sea b = c, es que* $h_a^2 = p(p-a)$, *donde p es el semiperímetro*. (*R.Blanchard, Mathesis* 1957).

Problema 7: *La condición necesaria y suficiente para que b = c, es que*

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Problema 8: *Demostrar que la recta de Euler de un triángulo no pasa por el centro de uno de los círculos triangentes* (*incentro o exincentros*) *más que si ABC es isósceles*. (*Mathesis,* 1929).

Problema 9: *Demostrar que ABC es isósceles si y sólo si la recta OG es perpendicular a un lado del triángulo*. (*M.Bencze, Gazeta matematica* 2-3/1993).

En el caso de las bisectrices exteriores, la situación es algo más compleja. Si el triángulo es isósceles, las bisectrices exteriores correspondientes a los ángulos iguales son iguales. Sin embargo, Emmerich (1900) dió el siguiente ejemplo de un triángulo escaleno con bisectrices exteriores iguales: Sean BM y CN las bisectrices exteriores de B y C del triángulo de ángulos $\widehat{B} = 12º, \widehat{C} = 132º, \widehat{A} = 36º$. Ya que

$$\widehat{BCM} = 48º = \widehat{CMB},$$

y $\widehat{CBN} = 12º = \widehat{BNC},$ resulta que

$$BM = BC = CN.$$

Obsérvese que el exincentro I_a está en el segmento BM pero no en el CN.■

También es posible buscar un ejemplo de un triángulo rectángulo no isósceles donde las bisectrices exteriores sean iguales. Supongamos $\widehat{A} = 90º,$ sea P el punto en que la bisectriz exterior de B corta a CA, y Q el punto en que la bisectriz exterior de A corta a BC. En el triángulo BAP,

$$BP = \frac{c}{\sin\frac{B}{2}};$$

y en BAQ,

$$AQ = \frac{c\sin B}{\sin(B-45º)},$$

así que la igualdad BP = AQ se escribe como

$$\sin(B-45º) = \sin B \cdot \sin\frac{B}{2},$$

ecuación que NO tiene la solución $\widehat{B} = 45º,$ pero tiene una solución próxima a 75º.■

Se puede demostrar también que si dos bisectrices exteriores de un triángulo escaleno son iguales, entonces los senos de los tres semiángulos interiores del triángulo están en progresión geométrica (A.M.M. 1933, p.423).

Los triángulos no isósceles con bisectrices exteriores iguales se llaman *seudoisósceles*, nombre dado por M. Alauda en *l'Intermediaire des Mathématiques* (1849) donde pedía se demostrara para ellos la relación

$$a^2 + bc = 4Rr_a.$$

Al igualar las expresiones para los cuadrados de las longitudes de dos bisectrices exteriores en un triángulo, por ejemplo las de los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C},$ se obtiene

$$(b-c)\varphi(a) = 0, \text{ donde}$$

$$\varphi(a) = a^3 - (b+c)a^2 + 3bca - (b+c)bc.$$

Supongamos $b > c$ y consideremos la ecuación cúbica en $a, \varphi(a) = 0$. Esta ecuación no tiene raíz negativa. Por las fórmulas de Cardano-Vieta, se verificará para sus tres raíces (reales o complejas) a_1, a_2, a_3

$$\sum a_i = b+c, \sum a_i a_j = 3bc, \prod a_i = (b+c)bc,$$

así que su discriminante

$$\sum a_i \sum a_i a_j - 3a_1a_2a_3 = \sum a_i^2(a_j + a_k),$$

luego la ecuación tiene una raíz positiva a_1 y dos complejas. Además, de las desigualdades

$$\varphi(c) = bc(c-b) < 0, \varphi(b) = bc(b-c) > 0$$
$$\varphi(b-c) = -2c^3 < 0,$$

resulta $c < a_1 < b,\ \ a_1 > b-c$. Por lo tanto, a_1 forma con b y c un triángulo real. El valor de a_1 en función de b y c es

$$M + \sqrt[3]{M^3 + \sqrt{N}} + \sqrt[3]{M^3 - \sqrt{N}},$$

donde

$$M = \frac{b+c}{3}, N = \frac{bc\left(27b^2c^2 - 9bc(b+c)^2 + (b+c)^4\right)}{27}$$

Enumeramos algunas propiedades de los triángulos seudoisósceles, todas procedentes de la Bibliografía de Neuberg :

$$\begin{aligned}
AI^2 &= BI \cdot CI \\
II_a^2 &= II_b \cdot II_c = 4R \cdot II_a \\
AI &= r_a - r \\
BI_a \cdot CI_a &= AI \cdot AI_a = AI_b \cdot AI_c = bc \\
a^2 &= 2R(2r_a - h_a) \\
\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \frac{a}{bc} &= 0 \\
\frac{r}{R} &= 4\sin^3\frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Es natural preguntarse qué ocurrirá si en un triángulo una bisectriz interior es igual a una exterior. Este era el objetivo del problema 1607 de *Crux Mathematicorum* (1991,*p*.15), propuesto por Peter Hurthig. En 1992 se publicaron tres de las 10 soluciones recibidas. Andy Liu dió el ejemplo del triángulo con ángulos $\widehat{A} = 24º, \widehat{B} = 84º, \widehat{C} = 72º$. Shailesh Shirali, tras dar el ejemplo 30º,30º,120º, estudió el caso general con las expresiones de las longitudes de las bisectrices y dió un modo de obtener infinitos triángulos escalenos con la propiedad requerida. Jordi Dou dió el ejemplo de Shirali (30º,30º,120º) y probó que si la bisectriz interior AD es igual a la exterior BE, entonces el ángulo A debe ser menor que un ángulo fijo φ, aproximadamente igual a 30,214335º. Yo, por mi parte, dí el ejemplo del triángulo isósceles de lados $a, a, a\sqrt{3}$.

I.2 Triángulo equilátero

Una excelente recopilación de problemas relativos al triángulo equilátero la constituye el libro de Constantin Cocea 200 *de probleme din geometria triunghiul echilateral*, *Editura Gh*. *Asachi*, *Iasi*, *Rumania*, 1992.

Vamos a enumerar resultados que implican que el triángulo sea equilátero :

Problema 10: *Demostrar que si en un triángulo se verifican las igualdades*

$$a + k \cdot m_a = b + k \cdot m_b = c + k \cdot m_c, \quad k \in \left(0, \frac{2}{3}\right],$$

entonces el triángulo es equilátero (m_a, m_b, m_c *medianas*).

Problema 12: *En el triángulo ABC, sea K el punto de Lemoine* (*intersección de las simedianas*). *Demostrar que*

$$\text{ABC equilátero} \iff card(OI, OG, OK) < 3.$$

(M.Burtea, Gazeta Matematica 5/1982)

Problema 13: *Sea ABC acutángulo con alturas* AA_1, BB_1, CC_1.

Si se representa con [ ] *el área, y se verifica la relación*

$$[HA_1B] + [HB_1C] + [HC_1A] = \frac{1}{2}[ABC],$$

entonces el triángulo es equilátero.

Problema 14: *Sea ABC un triángulo de lados a,b,c. Si se verifican las igualdades*

$$m_a = \frac{b\sqrt{3}}{2}; \; w_c = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

entonces el triángulo es equilátero.

Problema 15 : *Demostrar que el triángulo ABC es equilátero si y sólo si la suma de las longitudes de las simedianas es* $\frac{9R}{2}$.

Problema 16: *Si en el triángulo ABC se verifica*

$$r_a + r_b + r_c = p\sqrt{3},$$

entonces el triángulo es equilátero.

Problema 17:*Si se verifica en un triángulo*

$$ab^2 \cos A = bc^2 \cos B = ca^2 \cos C,$$

entonces el triángulo es equilátero.

Problema 18: *En ABC, sean AD,BE,CF cevianas concurrentes en M*. *Si los triángulos BDM, CME y AMF tienen la misma área y el mismo perímetro*, *entonces ABC es equilátero*. (*F.Parvanescu*, *Gazeta matematica* 4/1996).

Problema 19 : *Sea el triángulo ABC, y M*$\in (AC), N \in (AB), P \in (BC),$ *tales que*

$$MN \perp AC, \;\; NP \perp AB, \;\; MP \perp BC.$$

Probar que si el punto de Lemoine de ABC coincide con el baricentro de MNP, *entonces ABC es equilátero.*

(C.Manolescu, Gazeta Matematica 10/1996)

Problema 20 : *Sea, en el triángulo ABC*

$$M = 2p(p^2 - 3r^2 - 4Rr).$$

Demostrar que ABC es equilátero si y sólo si

$$\frac{1}{M-a^2}+\frac{1}{M-b^2}+\frac{1}{M-c^2}=\frac{1}{4RS},$$

siendo S el área de ABC. (*M.Bencze*, *Gazeta matematica* 7-8/1987).

Problema 21 : *Sea ABC un triángulo de incentro I. Demostrar que si los triángulos AIB,BIC,CIA tienen el mismo perímetro, entonces ABC es equilátero*. (*Gazeta matematica* 3/1994).

Problema 22: *Sean I_a, I_b, I_c los exincentros de ABC. Demostrar que $[ABC]$ es la media armónica de las áreas de AI_aB, BI_bC, CI_cA si y solamente si ABC es equilátero.*

Problema 23: *Demostrar que ABC es equilátero si y solamente si*

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)=9.$$

Problema 24: *Demostrar que ABC es equilátero si y solamente si*

$$8\cos A\cos B\cos C=1.$$

(Gazeta Matematica 3/1987)

$$(\cot A+\cot B+\cot C)\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}=\frac{3}{2}$$

(College Mathematics Journal, Mayo 1986)

$$\cot\omega=3,\ \text{siendo } \omega \text{ el ángulo de Brocard.}$$

(American Mathematical Monthly, prob.4491,1953)

Problema 25: *Demostrar que ABC debe ser equilátero si dos de los cinco puntos siguientes coinciden*: *I, O, G, H, O_9*. (*Prob*.898, *Mathematics Magazine* 1975).

I.3 Triángulos rectángulos y seudorrectángulos.

Es una obviedad decir que la proposición mejor conocida sobre el triángulo rectángulo es el teorema de Pitágoras :

La condición necesaria y suficiente para que el ángulo $\widehat{BAC}$ del triángulo ABC sea recto es que $a^2=b^2+c^2$.

El erudito norteamericano Elisha Scott Loomis, profesor de Matemáticas en el Baldwin-Wallace College, publicó en 1927 la primera edición de su libro *The Pythagorean Proposition*, donde se recogen 366 demostraciones del teorema. Hay una edición de 1940, del National Council of Teachers of Mathematics, que todavía se puede adquirir.

Presentamos algunos enunciados con condiciones para que un triángulo sea rectángulo:

Problema 26: *En el triángulo ABC, su circunferencia inscrita es tangente al lado AB en D, de tal manera que*

$$AC\cdot CB=2AD\cdot DB.$$

Demostrar que ABC es rectángulo.

Problema 27: *Probar que si los lados de un triángulo verifican una de las dos relaciones*

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}},$$
$$\sqrt{a-b} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}},$$

entonces el triángulo es rectángulo en A.

Problema 28: *Si los puntos* A_1, B_1 *dividen el lado AB del triángulo ABC en tres partes iguales y además se verifica*

$$\cot\widehat{ACA_1} + \cot\widehat{A_1CB_1} = 3 \cdot \cot\widehat{B_1CB},$$

entonces ABC es rectángulo. (*Svetolina Simeonova, Mathematyka&Informatyka* 3/1987)

Problema 29: *Los ángulos de un triángulo son proporcionales a los números x,y,z. Demostrar que es rectángulo si y solamente si*

$$x^3 + y^3 + z^3 + 2xyz = x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y).$$

(Gazeta Matematica 9/1994)

Problema 30: *Demostrar que si los lados de ABC verifican*

$$a^3 + b^3 + c^3 = ab(a+b) - bc(b+c) + ca(c+a),$$

entonces el triángulo es rectángulo.

(Gazeta Matematica 1/1976)

Problema 31: *Sea* $M \in BC$*. Si se verifica*

$$MA^2 \cdot BC^2 = MB^2 \cdot AC^2 + MC^2 \cdot AB^2,$$

entonces ABC es rectángulo en A. (*Gazeta matematica* 1967)

Problema 32: *Se verifican las equivalencias*

$$GO < \frac{R}{3} \Leftrightarrow ABC \textit{ acutángulo}$$
$$GO = \frac{R}{3} \Leftrightarrow ABC \textit{ rectángulo}$$
$$GO > \frac{R}{3} \Leftrightarrow ABC \textit{ obtusángulo}$$

(Elemente der Mathematik, 1952,nr.1,p.17).

Problema 33:

$$ABC \text{ rectángulo} \Leftrightarrow OI^2 + [ABC] = r^2 + R^2$$

(American Mathematical Monthly, 1959,p.813)

Problema 34: *Si una altura es simediana, entonces el triángulo es isósceles o rectángulo*.(*Crux Mathematicorum,prob*.960, 1985,*p*.267)

Problema 35: *Si AD,BE y CF son bisectrices interiores, y se verifica* $BI \cdot FI = BF \cdot AI$, *entonces ABC es rectángulo*.(*R.Izard, Dallas, Prob*.1132*b*, *Mathematics Magazine, Enero* 1983)

Problema 36 : *Caracterizar los triángulos tales que los puntos medios de las alturas están alineados* (*Huseyin Demir, prob*.1197, *Mathematics Magazine, Septiembre* 1985).

Los triángulos seudorrectángulos verifican la condición de que la diferencia entre dos de sus ángulos es 90º. Podemos enunciar las propiedades siguientes:

Problema 37: *Si en el triángulo ABC,* $\widehat{B} - \widehat{C} = 90º$, *entonces el centro de la circunferencia de los* 9 *puntos está sobre la recta BC.*

Problema 38: *Si en el triángulo ABC, B* - *C* = 90º, *y S y T son las intersecciones de la bisectriz interior y exterior con BC, entonces*:

$$\sin A = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2};$$

$$ST = 2h_a$$

a^2 es la media armónica de $(b-c)^2$ y $(b+c)^2$.

(E301, American Mathematical Monthly 1937,p.598).

Otras propiedades de estos triángulos, también citadas por Neuberg en su catálogo, son

$$\cos A = \frac{2bc}{b^2 + c^2}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{b-c}{b+c}$$

$$II_a = |b-c|\sqrt{2}$$

$$I_bI_c = (b+c)\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{II_a^2} + \frac{1}{I_bI_c^2} = \frac{1}{a^2}$$

Estas propiedades se deben a Droz-Farny y d'Avillez.

Si los puntos B y C son fijos, el lugar geométrico del vértice A es una hipérbola equilátera de vértices B y C.

(*Continuará*)

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI