TRIÁNGULOS ESPECIALES (2)
Francisco Bellot Rosado

II. Triángulos especiales definidos por relaciones entre sus ángulos

II.1 Triángulo con uno de sus ángulos doble de otro : A = 2B

Mediante el teorema del coseno se puede obtener fácilmente la siguiente relación entre sus lados

$$a^2 = b^2 + bc.$$

Si OD y OE son las distancias de O a los lados BC y CA, se verifica

$$\frac{OD}{OE} = \left|\frac{b-c}{a}\right|$$

(este resultado se encuentra en *Mathesis* 1939). *La primera parte fué un problema propuesto en Valladolid en la* 1ª *Fase de la O.M.E.* 1990.

La longitud de la bisectriz interior desde A es $\frac{bc}{a}$; AI = $a-b$; $II_a = 2b$

$c = 4b(1+2\cos A)$.

La circunferencia que pasa por A,I,B corta respectivamente a los lados CB y CA en puntos P,Q tales que

$$QA = AI = IP = PB = a-b.$$

Las rectas PI,PA son respectivamente paralelas a AB,BQ. La recta PQ pasa por el pie de la bisectriz interior del ángulo C y $|PQ| = c$.

OC corta a AB en un punto que dista b del punto A.

(*Estas propiedades son de G. de Longchamps*)

Se verifican además las relaciones

$$\cos A = \frac{c-b}{2b}, \cos B = \frac{c+b}{2a}, \frac{r}{r_a} = \frac{a-2b}{a+2b}.$$

(*Barisien*, *Mathesis* 1912)

Algunos problemas relativos a este triángulo:

Problema 39 : *Si en un triángulo* $b = 4c \cdot \cos\left(30^o + \frac{A}{2}\right) \cdot \cos\left(30^o - \frac{A}{2}\right)$, entonces $A = 2C$ y se tiene

$$a^2 = c(b+c).$$

Problema 40: *En el triángulo ABC,* $B = 40^o, C = 80^o$. Probar que

$$9a^2b^2c^2 + a^3(b^3+c^3) = (a^3+b^3+c^3)^2$$

(*Ioan Tomescu, en Gazeta Matematica*)

Problema 41: *Si en un triángulo* $a = 4, b = 5, c = 6$, *entonces* $C = 2A$.

Problema 42: *Si en el triángulo ABC se tiene* $A = 2B = 4C$, *entonces*

$$a^2 = c(a+b-c)$$

Si $A = \frac{\pi}{7}, B = \frac{2\pi}{7}, C = \frac{4\pi}{7}$, *entonces*:

1)*Los puntos A, B, C son vértices de un polígono regular de* 14 *lados*.

2) $OH = OI_a = R\sqrt{2}$

3) $R = 2r_a$

4) $I_aH = R$

5) $a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2$

6) *Si B es el vértice* A_1, C *es* A_3, *y* $A = A_7$ (*vértices del polígono regular antes mencionado*), *entonces* OI_aHA_6 *es un paralelogramo cuyo centro coincide con el centro del círculo de los* 9 *puntos de ABC*.

7) *El punto medio del segmento* HA_6 *coincide con uno de los puntos de intersección del círculo circunscrito y el de los* 9 *puntos de ABC*.

8)*Los triángulos* AI_aH, HBI_a, I_aHC *son semejantes*.

9) *Las rectas BC,CA,AB cortan a la recta* HI_a *en puntos simétricos de A,B y C con respecto a las bisectrices de los ángulos C,A,B de ABC* (*para los ángulos C y B deben tomarse las bisectrices exteriores*).

10) *Los cuadrados de las longitudes de los lados del triángulo* OI_aA_6 *y los cuadrados de las longitudes de los lados del triángulo* A_6I_aH *forman una progresión geométrica de razón* 2.

(*Los* 10 *apartados forman un problema del libro de P.S.Modenov Problems in Geometry, Mir*, *Moscow*, 1981).

Para este triángulo, si BD y CE son las bisectrices interiores, Liénard probó en *Mathesis*, *vol*.3, las propiedades

$$b^2 = c \cdot AE, a^2 = b \cdot CD, ab = c \cdot CE, ac = b \cdot BD, a^2 = BD \cdot CE$$

Igualmente para este triángulo, en *Mathesis vol*.64 (1955) se demuestra que

$$\Omega\Omega' = \frac{R}{2} \text{ y que } \cot\omega = \sqrt{7}.$$

II.2 Triángulo con uno de sus ángulos triple de otro : A = 3B

En la Olimpiada checa y eslovaca de 1997 se propuso el siguiente problema :

Si en un triángulo, $A = 3B$, *entonces se verifica* $(a^2 - b^2)(a-b) = bc^2$. *¿Es cierto el recíproco*?

La primera parte se reduce a comprobar una identidad trigonométrica, una vez que se sustituyen los lados en función de los senos de los ángulos opuestos mediante el teorema de los senos.

El recíproco es en general falso: como la función seno tiene período 2π, los lados del triángulo tienen la forma

$$a = K\sin 3B, b = K\sin B, c = K\sin 4B$$

(porque $C = \pi - 4B$), también en el caso en que

$$A = 3B - 360^{\circ}, \text{ y } C = 540^{\circ} - 4B,$$

por ejemplo cuando $A = 15^{\circ}, B = 125^{\circ}, C = 40^{\circ}$. Para un triángulo con esos ángulos, la igualdad $(a^2 - b^2)(a-b) = bc^2$ se mantiene, pero $A \neq 3B$.■

Para triángulos cuyos ángulos verifican la proporción

$$A : B : C = 1 : 3 : 9$$

se pueden demostrar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} HH_a + HH_b - HH_c &= \frac{R}{2}, \\ OI^2 + OH^2 &= 5R^2 \\ bc + ca + ab &= \sqrt{13}\,R^2 \\ \frac{1}{\cos\omega} &= 1 + \sqrt{13} \end{aligned}$$

(*Mathesis*, *vol*.68 (1959); así como también

$$\cos B \cos C + \cos C \cos A + \cos A \cos B = -\frac{1}{4}$$

(Victor Thébault, en *American Mathematical Monthly*, *E*1301,1958)

Observación

En *Crux Mathematicorum* 1984, *p*.36-39, *Oene Bottema y Léo Sauvé* estudiaron la existencia de un triángulo para el que se verificase la relación

$$\cos A : \cos B : \cos C = l : m : n.$$

II.3 Triángulo con uno de sus ángulos cuádruple de otro : A = 4B

En la Competición Matemática Mediterránea de 1999, Bulgaria (por medio de la Prof. Emilia Velikova) propuso el siguiente problema:

En el triángulo ABC, $A = 4B$. *Demostrar que*

$$a^2bc^3 = (a^2 - b^2 + bc)(b^2 - a^2 + bc)^2.$$

(Dejamos la demostración a los lectores, recomendándoles que utilicen los dos casos (A=2B y A = 3B) anteriores).

II.4 Triángulo con ángulos en progresión aritmética: C + A = 2B

Hayo Ahlburg (residente en Benidorm, Alicante, España) propuso en *Crux Mathematicorum* (1982,*p*.78) el problema de demostrar que para estos triángulos se verifican las propiedades siguientes:

i) $\sin(A - B) = \sin A - \sin C$

ii) $a^2 - b^2 = c(a - c)$

iii) A, C, O, I, H, I_b están en una circunferencia de radio R.

(Observación: como este triángulo tiene un ángulo de 60º, ver el siguiente tipo de triángulos)

II.5 Triángulo con un ángulo de 60º ó 120º

Para fijar ideas, supongamos A = 60º ó A = 120º.

Lemoine demostró en 1900 que, en estos casos, la recta de Euler HO es perpendicular repectivamente a la bisectriz interior o exterior del ángulo A.

En *Mathesis* 1897 *y* 1914, *Déprez*, *Goormaghtig y Barisien* probaron los 9 resultados siguientes para el caso $A = 60^{\circ}$:

1) O_9 está en la bisectriz interior desde A

2) El punto de Feuerbach φ es el punto medio de AI

3) Llevando sobre AB y AC las longitudes AC'=$b, AB' = c$, los ocho puntos B,C,B',C',O,H,I,I_a están en una circunferencia.

4) $OH = |b-c|$

5) $p = (R+r)\sqrt{3} = r_a\sqrt{3}$

6) $r = \frac{p-a}{\sqrt{3}}$

7) $R = AH$

8) AI = $2r$

9) $\cos B = \frac{2c-b}{2a}, \cos C = \frac{2b-c}{2a}$

10) La circunferencia BCO corta a la simediana AK en un centro isógono de ABC y a la mediana AG en un centro isodinámico de ABC. (Emmerich)

En la Enciclopedia de Geometría de Shiiko Iwata (vol.3, p.440 y siguientes) se recogen varios resultados de Víctor Thébault en *Mathesis*(1930) en relación con estos triángulos:

11) $AH = AO = R$

12) $O_9I \perp OH$

13) $a^2+b^2+c^2 = 6R^2+4r(R+r)$

Algunos problemas sobre estos triángulos:

Problema 43: *Probar que si en el triángulo ABC, A* = 60º, *entonces*

$$3(b^2+c^2) = 4(h_b^2+h_c^2).$$

¿Es cierto el recíproco? (*Gazeta Matematica* 1968)

Problema 44: *En ABC, A*=60º. *Probar que la distancia entre el baicentro G y el centro isógono interior* (*desde donde los lados del triángulo se ven bajo el mismo ángulo*) *es* $\frac{|b-c|}{3}$. (Ioan Tomescu, Gazeta Matematica 1964)

Problema 45:*Si BE y CF son las bisectrices interiores del triángulo ABC, con A* = 60º, *entonces las circunferencias ABE y ACF se cortan sobre el lado BC* (*Mathesis* 1935)

Problema 46:*Si, en el triángulo ABC, se verifica*

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C} = \sqrt{3},$$

entonces al menos un ángulo del triángulo es de 60º. (*W.J.Blundon Am.Math. Monthly, E*1936, 1966, *p*.1122)

Problema 47: *El triángulo ADC es tal que C* = 120º. *La bisectriz interior de C corta a AD en B. Probar que* $2 \cdot CB$ es la media armónica de CA y CD. (Am. Math. Monthly, 1904, p.16)

Problema 48: *Si en el triángulo ABC se verifica*

$$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C = 1,$$

alguno de los ángulos del triángulo es de 120º.

Triángulos especiales definidos mediante otras condiciones sobre sus ángulos

II.6 El triángulo tal que $\tan A = \tan B + \tan C$

Se cumplen las propiedades siguientes (*Mathesis*, 1907 *y* 1922):

a) H es el punto medio de la altura desde A.

b)

$$\cos A = \cos B \cos C = \frac{1}{2}\sin B \sin C$$

$$\tan B \tan C = 2$$

c) Los puntos medios de las alturas desde B y C están situados sobre OC y OB; la recta que une esos puntos medios pasa por G.

d) $b^2 + c^2 - a^2 = h_a^2$; $3a^2 + b^2 + c^2 = 16R^2$ (Thébault)

e) $3\cos A = \cos(B - C)$

f) $3a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 - (b^2 - c^2)^2 = 0$

II.7 El triángulo tal que $\cot A = \cot B + \cot C$

Thébault y Goormaghtigh estudiaron este triángulo en Mathesis, 1922; se cumplen las propiedades :

a) $3a^2 = b^2 + c^2$

b) $a^2 = bc\cos A$

c) $h_a = a\tan A$

d) $\cot\omega = 2\cot A$

e) La distancia del punto de Lemoine K al lado BC es la cuarta parte de la altura desde A (Thébault)

f) G pertenece a la recta que pasa por los pies de las alturas desde B y C (Goormaghtig)

II.8 El triángulo tal que $\sin A = \sin B \sin C$

Resultados de Thébault en *Mathesis* 1922 :

a) $h_a = a,$ pues $c\sin B = h_a = b\sin C,$ así que $h_a^2 = bc\sin A = \frac{abc}{2R}$;
usando el teorema de los senos en la condición del problema, resulta
$2Ra = bc,$ es decir $a^2 = h_a^2.$

b) $\sqrt{5} - 1 < \frac{b}{2c} < \sqrt{5} + 1$

II.9 El triángulo tal que $\cos B + \cos C = 1$

En este triángulo se tiene: $OI \parallel BC$; $AI \perp IH$. En efecto: De la identidad conocida $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$, resulta $R\cos A = r,$ y esto quiere decir que $OA_m = ID,$ es decir, $OI \parallel BC.$

Por otra parte, de $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$ obtenemos $\frac{AI}{AH} = \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}.$

Transformando en producto $\cos B + \cos C = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 1$ y por lo tanto $\frac{AI}{AH} = \cos\frac{B-C}{2}.$
esto quiere decir que $\widehat{IAH} = \frac{B-C}{2}$ y por la definición de coseno, $\widehat{AIH} = 90º$.■

En este triángulo también se verifican las relaciones

$$\sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \frac{1}{2};\quad \tan^2\frac{A}{2} = \frac{R-r}{R+r}.$$

II.10 El triángulo tal que $\cos A = \cos B + \cos C$

En este triángulo se cumplen las relaciones siguientes:

i) $4p(p - b)(p - c) = abc$

ii) $R = r_a$

iii) O pertenece a la recta que une los pies de las bisectrices interiores de B y C.

iv) $H_a \in OI$.

(V.Thébault)

i) es una consecuencia del teorema del coseno.

ii) $r_a = \frac{S}{p-a}, R = \frac{abc}{4S}$ así que la igualdad a demostrar es $4S^2 = abc(p-a)$ y usando i) resulta la fórmula de Herón.

iii) Si M_1, M_2, M_3 son los puntos medios de los lados del triángulo, la igualdad que define los triángulos es $OM_1 = OM_2 + OM_3$, de donde se deduce la conclusión.

iv) $M_1H_a = R\sin(C-B)$ si suponemos $c > b$. Entonces $\frac{OM_1}{M_1H_a} = \frac{\cos A}{\sin(C-B)}$. Si D es el punto de tangencia del incírculo con BC,

se tiene $\frac{ID}{DH_a} = \frac{r}{AI\sin\frac{C-B}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{C-B}{2}} \Rightarrow \frac{OM_1}{M_1H_a} = \frac{ID}{DH_a}$, de donde se deduce que O,I, H_a están alineados.■

Otras propiedades de este triángulo:

v) Las rectas que unen los vértices A,B,C con los puntos de tangencia del excírculo (I_a) con BC,CA,AB concurren en un punto del círculo circunscrito a ABC.

vi) El círculo de diámetro AH_a pasa por el punto de Feuerbach φ del triángulo.

vii) $a^2p = b^2(p-c) + c^2(p-b)$.

Neuberg, en Mathesis 1923, demostró mediante coordenadas trilineales que si la recta H_bH_c pasa por I, entonces $\cos A = \cos B + \cos C$.

II.11 El triángulo tal que $\cos 2A + \cos 2C = \cos 2B$

Barisien probó el resultado siguiente:

Si BO es tangente a la circunferencia que pasa por O, C y H_a, entonces se verifican las relaciones

i) $a^2 - b^2 + c^2 = 2R^2$

ii) $\cos 2A + \cos 2C = \cos 2B$.

En efecto, de la condición del problema se desprende que

$$R^2 = ac\cos B, \quad *$$

que junto con el teorema del coseno ($b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$) da i).

Por otro lado, $a^2 = 4R^2\sin^2 A = 2R^2(1-\cos 2A)$ y sustituyendo en i) resulta directamente ii).■

II.12 El triángulo tal que $2\tan A = \tan B + \tan C$

Se puede probar que esta expresión es equivalente a $OH \parallel BC$.

En efecto, sea M_1 el punto medio de BC; entonces $OH \parallel BC$ se expresa mediante $OM_1 = HH_a$, pero $OM_1 = R\cos A, HH_a = 2R\cos B\cos C$ resulta que $\cos A = 2\cos B\cos C (**)$

Por otro lado, $2\tan A = \tan B + \tan C \Leftrightarrow \frac{2\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} =$

$= \frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C} = \frac{\sin A}{\cos B\cos C}$ y resulta claramente (**).■

II.13 El triángulo tal que $\tan^2\frac{A}{2} = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

Probemos que esta igualdad es equivalente a estas dos:

i) $a(b+c) = b^2 + c^2$

ii) $KI \parallel BC$

En efecto, la igualdad trigonométrica se escribe

$$\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \frac{(p-a)}{p}$$

y desarrollando se obtiene i).

Por otro lado $KI \parallel BC$ se escribe igualando r a la primera coordenada trilineal absoluta del punto de Lemoine, que es $\frac{2aS}{a^2+b^2+c^2}$,

y desarrollando y simplificando, teniendo en cuenta que $S = pr,$ se obtiene i).■

Por su parte, C.W.Trigg, utilizando coordenadas trilineales demostró (A.M.Monthly 1951,E964) que $\tan^2\frac{A}{2} = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ es equivalente a que la recta que une el punto de Gergonne con el de Nagel sea paralela a BC.

Si Γ_a, N_a son los pies de las cevianas de Gergonne y Nagel desde A, entonces

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\Gamma_a} = \frac{[\Gamma CA] + [\Gamma AB]}{[\Gamma BC]} = \frac{\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}}{\frac{1}{p-a}} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}.$$

Análogamente,

$$\frac{AN}{NN_a} = \frac{(p-b)+(p-c)}{p-a} = \frac{a}{p-a}$$

Igualando las fracciones y desarrollando se obtiene $a(b+c) = b^2 + c^2$■

II.14 El triángulo tal que $\cot^2 A = \cot B \cot C$

Thébault demostró que, para este triángulo,

i) $a^2(b^2+c^2) = b^4 + c^4$

ii) H_bH_c y AK son las diagonales de un paralelogramo

iii) $OH \perp AK$

En efecto, la condición del problema se expresa en función de senos y cosenos; operando y teniendo en cuenta los teoremas del seno y el coseno se obtiene i).

Sea K_1 el pie de la simediana desde A: entonces $\frac{BK_1}{CK_1} = \frac{c^2}{b^2}$ (teor. de la simediana), de aquí que $\frac{CK_1}{CB} = \frac{b^2}{b^2+c^2}$, y por otra parte

$\frac{CH_b}{CA} = \frac{a\cos C}{b} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b^2}$ = utilizando i) = $\frac{\frac{2b^4}{b^2+c^2}}{2b^2} = \frac{b^2}{b^2+c^2} = \frac{CK_1}{CB}$. Esto demuestra que $K_1H_b \parallel BA,$ y análogamente se demuestra que $K_1H_c \parallel CA,$ de donde se deduce ii).

iii) se puede probar mediante coordenadas trilineales.■

II.15 El triángulo $\sqrt{\cot A} = \sqrt{\cot B} \pm \sqrt{\cot C}$

Thébault probó en *Mathesis* (1932) *que, en este triángulo, se verifican las relaciones*

i) $\cot\omega = 2$

ii) $\sum a^2 = 8S$

iii) $5\sum a^4 = 6\sum b^2c^2$.

Problemas sobre triángulos definidos mediante otras relaciones entre sus ángulos

Problema 49: *Si las tangentes de los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética, la recta de Euler es paralela a un lado.* (*Am. Math. Monthly, E*259, 1937, *p.*104)

Problema 50: *Determinar la relación que existe entre los ángulos de un triángulo cuyo baricentro está en la circunferencia inscrita* (*V. Cristescu, en Gazeta Matematica* 1895)

Problema 51: *Los tres ángulos de un triángulo están en progresión aritmética; demostrar que*

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2;$$

¿qué relaciones hay entre sus lados? (*V.Thébault, en Mathesis* 1940)

Problema 52: *¿Qué relación particular debe existir entre los ángulos del triángulo ABC para que se verifique*

$$4\sin B\left(\sin A\cos^2\frac{C}{2} - \sin B\cos C\right) = \sin^2 A?$$

(Gazeta Matematica 1968)

Problema 53: *Sea ABC un triángulo con B y C agudos y cosA=*$\frac{3}{5}$.

Si D es el pie de la altura desde A, demostrar que la recta que une los centros de los círculos inscritos en ABD y ACD es perpendicular ala que une A con el punto de tangencia de BC con el círculo exinscrito (I_a). *Estudiar el caso en que B ó C son obtusos*.

(R.Blanchard en Mathesis 1952)

Problema 54: *Si los ángulos de un triángulo verifican*

$$\sin A + \sin C = 2\sin B,$$

entonces:

i) $\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{C}{2} = 3$

ii) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} = 2\cot\frac{B}{2}$

iii) $2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \sin\frac{B}{2}$

(Mathesis 1901)

Problema 55: *Si en el triángulo ABC*, $2A + 3B = 180^{\circ}$, entonces

$$4(a+b) \leq 5c.$$

(Gazeta Matematica 1968)

Problema 56: *Si en el triángulo ABC, se verifica*

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = 2, \quad \text{entonces:}$$

i) $\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} = 2$

ii) $r_a + r_b + r_c = 2p$

iii) $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 2p^2$

iv) $\sqrt{r_a} = \sqrt{r_b} + \sqrt{r_c}$

v) $8S = 2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)$

vi) $1 + \cot\omega = \frac{p}{2r}$

vii) $OH^2 - OI^2 = 3S$

(Mathesis, 1945)

Problema 57: *Si en el triángulo ABC, se verifica*

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1,$$

entonces el círculo circunscrito y el de los 9 *puntos se cortan ortogonalmente*.

(Am. Math. Monthly, E285, 1937, p.384)

Problema 58: *Si en el triángulo ABC se verifica la relación*

$$\sin A\cos B = \sin C\cos C,$$

entonces el circundiámetro por A, la bisectriz interior de B y la mediana desde C son concurrentes.

(Am. Math. Monthly, E1574, 1964, p.94)

Problema 59: *Caracterizar los triángulos* (*tal vez degenerados*) *para los que se verifica*

$$(1+\cos B)(1+\cos C)(1-\cos A) = 2\cos A\cos B\cos C$$

(Murray Klamkin, en Crux Mathematicorum, 1990, p.109)

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI