TRIÁNGULOS ESPECIALES (3)
Francisco Bellot Rosado

III Triángulos especiales definidos por relaciones entre sus lados u otros elementos del triángulo.

III.1 El triángulo cuyos lados están en progresión aritmética: $2a = b + c$.

Propiedades:

i) $OI \perp AI$. En efecto, podemos suponer $c > b$. Si D es el pie de la ceviana de Gergonne, se tiene

$$DB^2 - DC^2 = (p-b)^2 - (p-c)^2 = a(c-b).$$

Como $2a = b + c,\ c^2 - b^2 = 2(DB^2 - DC^2);$ pero

$$BH_a^2 - CH_a^2 = 2(DB^2 - DC^2),$$

luego $M_1H_a = 2M_1D$. Si AIcorta de nuevo al círculo circunscrito en D_1 es sabido que $D_1M_1 \parallel AH_a$; como $I \in AD_1$, $OI \perp AI$.■

ii) $AI^2 = 2Rr$. En efecto: $AI^2 = R^2 - OI^2 = R^2 - (R^2 - 2Rr) = 2Rr$.■

Las siguientes condiciones implican $2a = b + c$:

a) $GI \parallel BC$

b) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.

En efecto: si $GI \parallel BC$, $GM_1 = \frac{h_a}{3}$, luego $ar = \frac{a}{3}h_a = \frac{2S}{3} = \frac{2}{3}sr$ y $a = \frac{2}{3}s$, así que $2a = b + c$.

Por otro lado, $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-a)}} \bullet \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \frac{p-a}{p} = \frac{1}{3}$

y haciendo operaciones resulta $2a = b + c$.■

Otras propiedades de este triángulo, tomadas de *Mathesis* (*varios años*):

$IG = \frac{2}{3}(b-a)$; la recta IG contiene al punto de Nagel y al centro de gravedad del perímetro del triángulo (no debe confundirse con G; es el incentro del triángulo medial de ABC); los puntos I, O_9, el punto de tangencia del círculo inscrito con BC, y el punto de Feuerbach φ, están alineados. Además se verifican, entre otras, las relaciones

$$h_a = 3r = r_a;\ AI^2 = 3Rr = \frac{1}{3}bc;\ \frac{1}{r_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right)$$
$$OI^2 = 2r(R-r);\ a^2 = 4r(2R-r).$$

La recta OI corta a AB o a AC en un punto P tal que

$$\frac{1}{AP} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Si $a < b < c$ están en progresión aritmética de diferencia d, entonces

i) $6Rr = ac$

ii) $d = \sqrt{2r(R-2r)}$

En efecto: de un lado, $2p = 3b$ (*). Como $4Rsr = abc$, esto es lo mismo que $2Rr \times 3b = abc \Leftrightarrow 6Rr = ac$, que es i).

Para probar la segunda parte, tenemos $2Rr = \frac{ac}{3} = \frac{1}{3}(b^2 - d^2)$ (**)

Por otra parte,

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \frac{\left(\frac{b}{2}+d\right)\cdot\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{b}{2}-d\right)}{\frac{3}{2}b} = \frac{(b+2d)(b-2d)}{12}$$

de donde $4r^2 = \frac{b^2-4d^2}{3}(***)$. De (**) y (***) resulta

$$2Rr-4r^2 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{2r(R-2r)}.\blacksquare$$

En *Crux Mathematicorum*, 1977, p.166 se demuestra que

$$a,b,c \text{ en p.a. } \Leftrightarrow p^2 = 18Rr-9r^2$$

III.2 El triángulo tal que $3a = b+c$
Propiedades de este triángulo:
i) $IG \perp BC$
ii) O equidista del incentro y del punto medio de AI
iii) Si D es el punto de tangencia del círculo inscrito con BC, el punto de Nagel del triángulo es el segundo extremo del diámetro DI.
iv) Se verifican, entre otras, las relaciones

$$S = ar_a;\ p^2 = 2r_br_c;\ 2r^2 = (p-b)(p-c) = (c-a)(b-a);$$
$$AI^2 = \frac{bc}{2} = 4Rr;\ \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c};\ r = \frac{r_a}{2} = \frac{IB\cdot IC}{IA};$$
$$\cot\frac{A}{2} = \cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2};\ \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{2};$$
$$\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{3}\cos\frac{B-C}{2} = \sqrt{\frac{r}{4R}}$$

Estos resultados son de V.Thébault y R. Goormaghtigh.

III.3 El triángulo cuyos lados están en progresión geométrica: $a^2 = bc$
Propiedades de este triángulo :
i) El punto medio de AB, el pie de la simediana desde B y el pie de la bisectriz exterior desde A están alineados. También lo están el pie de la simediana desde C, el punto medio de AC y el pie de la bisectriz exterior desde A. (*Demostración con el teorema de Menelao*)
ii) La bisectriz interior desde A, la paralela media de BC y la recta que une los pies de las simedianas desde B y C son concurrentes.
iii) $\frac{a^2}{a^2+c^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2}$
(Estos resultados son de Thébault, *Mathesis* 1930, p.188)
iv) Los puntos de Brocard son las intersecciones de la bisectriz AI con las mediatrices de AB y AC.
v) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) < \frac{b}{a} < \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$.
vi) $(p^2+4Rr+r^2)^3 = 32Rrp^4$ (*Crux Mathematicorum*, 1977,p.166)

III.4 El triángulo medio armónico $\frac{2}{a} = \frac{1}{b}+\frac{1}{c}$
Propiedades de este triángulo:
i) Si $b < c$, entonces $b < \left(1+\sqrt{2}\right)c$
ii) Las paralelas a AB y AC trazadas por el pie de la bisectriz desde A forman con esos lados un rombo de lado $\frac{a}{2}$.
iii) La perpendicular a la bisectriz interior desde A, trazada desde el pie de esta bisectriz, corta a AB y a AC en puntos que distan a del punto A.

iv) Llevemos sobre CA y AB las longitudes $CL = AL' = \frac{a}{2}$; sean N y N' los isotómicos de L y L'. Entonces las rectas BL y CL'; BN y CN' se cortan en puntos de la mediana desde A. (Laisant, 1890)

III.5 El triángulo tal que $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Propiedades de este triángulo :

i) $h_a = h_b + h_c$ (inmediato a partir de $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$)

ii) La recta que une los pies de las bisectrices interiores desde B y desde C pasa por G (coord. trilineales)

Estos resultados son de R. Goormaghtigh.

III.6 El triángulo automediano $2a^2 = b^2 + c^2$

Dado el triángulo ABC, consideremos sus medianas AD, BE, CF y prolonguémoslas hasta que corten de nuevo al círculo circunscrito en L, M, N respectivamente. ¿Cuándo será isósceles el triángulo LMN?

C.F. Parry, en *The Mathematical Gazette* 1991, *p*.151, estudia este bello problema de geometría clásica y encuentra que la condición sobre los lados de ABC para que LMN sea isósceles es

$$2a^2(b^2 - c^2) = (b^2 + c^2)(b^2 - c^2),$$

que se verifica en los dos casos siguientes:

1) $b = c$ (ABC es isósceles, que es el caso obvio, en el que las medianas son proporcionales a los lados en su mismo orden)

2) $2a^2 = b^2 + c^2$ y ABC no es isósceles. Los lados son proporcionales a las medianas, *pero en un orden diferente*.

Estos triángulos se llaman automedianos.

Propiedades de los triángulos automedianos :

i) Si x, y, z son los lados de un triángulo rectángulo de lados enteros, con $x > y > z$, y $\frac{x}{2} > z$, entonces el triángulo de lados $x, (y+z), (y-z)$ es automediano. Por ejemplo, la terna pitagórica 13,12,5 da la terna automediana 13,17,7 que es el menor triángulo automediano con lados enteros.

Sólo hay un triángulo rectángulo automediano, el de lados $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1$. Además es el único triángulo rectángulo que tiene dos medianas perpendiculares (v. Triángulos ortomedianos)

ii) G es el punto medio de AL (cuerda en el círculo circunscrito)

iii) BGCL es un paralelogramo.

iv) BGL y CLG son indirectamente semejantes a ABC

v) La recta de Euler OG es perpendicular a la mediana AG

vi) Si K es el punto de Lemoine (o punto simediano), GK es paralela a BC

vii) Si T es el punto de Fermat (punto interno isógono), entonces BT, AT y CT forman una progresión aritmética (en ese orden).

viii) $2m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$

ix) $2AH^2 = BH^2 + CH^2$

x) $2\cot A = \cot B + \cot C$

xi) $OK \perp AK$

xii) $\Omega\Omega' \parallel AK$ (usar coord. trilineales)

xiii) La condición necesaria y suficiente para que ABC sea automediano es que las bisectrices de $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AGC}, \widehat{BCA}$ y $\widehat{BGA}$, o $\widehat{CAB}$ y $\widehat{CGB}$ se corten sobre CA, AB o BC, respectivamente.(Jiro Fukuta, en *The College Mathematics Journal*, *marzo* 1993, *p*. 186-188)

III.7 El triángulo tal que $3a^2 = b^2 + c^2$

Propiedades de este triángulo:
i) $a^2 = b\cos A$
ii) $\cot A = \cot B + \cot C$
iii) $G \in H_bH_c$
iv) $K \in BC$
v) $O \in K_bK_c$
vi) $a < \sqrt{bc}$
vii) $\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{bc} < w_a < \sqrt{bc}$.

III.8 El triángulo ortomediano

Una excelente exposición sobre el triángulo ortomediano (el que tiene dos medianas perpendiculares) es de Mihaly Bencze en su revista *Gamma*, 1/1986, pp. 23-25 (en rumano).

Las siguientes propiedades son equivalentes :
i) ABC es ortomediano
ii) entre sus lados se verifica una relación de la forma $a^2 + b^2 = 5c^2$.
iii) $2\cot A = \cot B + \cot C$
iv) $\sin B \sin C \cos A = \sin^2 B - 2\sin^2 C$
v) m_a, m_b, m_c son los lados de un triángulo rectángulo
vi) $1/h_a, 1/h_b, 1/h_c$ son los lados de un triángulo ortomediano

Otras propiedades de los triángulos ortomedianos:
Si ABC es ortomediano, entonces:
viii) El coseno de uno de los ángulos del triángulo es mayor o igual que 4/5.
ix) Si $m_b \perp m_c$, entonces $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$ (S.Reich, en *American Mathematical Monthly*, 10/1965)
x) Si $a^2 + b^2 = 5c^2$, entonces $3c^2 = p^2 - r^2 - 4Rr$; $3pr\cot C = p^2 + r^2 - 4Rr$.
xi) $\left(\frac{2}{h_c}\right)^2 = \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_a^2}$

III.9 El triángulo seudo-pitagórico $a^4 = b^4 + c^4$

Propiedades de este triángulo:
i) $\tan\omega = \sin 2A$
ii) $2\sin^2 A = \tan B \tan C$

III.10 El triángulo tal que $a(b+c) = b^2 + c^2$

Propiedades de este triángulo:
i) La simediana desde A pasa por el punto de tangencia del círculo inscrito con BC.
ii) Las rectas AI y CF (F, punto de tangencia del incírculo con AB) se cortan sobre la mediana BG
iii) IK y NΓ son paralelas a BC
iv) $\widehat{A} \leq 60º$
v) Se verifican, entre otras, las relaciones

$$(p-a)^2 = (p-b)(p-c);\ \frac{(p-a)}{bc} = \frac{(p-b)}{c^2} = \frac{(p-c)}{b^2}$$
$$r_a^2 = r_b r_c;\quad \tan A = \sin B + \sin C;\ \cos A = \frac{a}{b+c}$$

III.11 Los triángulos en donde un exradio es igual a un lado

Sea $r_a = a$. Propiedades de este triángulo:
i) $a + h_a = b + c$
ii) $h_a = 2(p - a)$
iii) $\frac{1}{a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}$
iv) $(r_b + r_c - r_a)(r_b + r_c) = r_b r_c$
v) $\cos\frac{A}{2} = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$
vi) $\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = 1$

Sea $r_b = a$. Propiedades de este triángulo:
i) $h_a = 2(p - b)$
ii) $p(p-a)(p-c) = a^2(p-b)$
iii) $\cot\frac{B}{2} - \tan\frac{C}{2} = 1$

III.12 El triángulo tal que $m_a^2 = bc$
Propiedades de este triángulo:
i) Si los vértices B y C son fijos, A describe una hipérbola equilátera que es tangente a la bisectriz AI; I e I_a se mueven sobre perpendiculares a BC en los puntos de tangencia del incírculo y el excírculo con BC; el ortocentro describe una cuártica.
ii) Sean K' y G' los puntos donde la simediana AK y la mediana AG cortan de nuevo a la circunferencia circunscrita. Se verifican las relaciones
$m_a = AK', h_a = \frac{1}{4}a\cot\frac{A}{2}; a = |b - c|\sqrt{2}; a^2 = 8rr_a.$

III.13 El triángulo tal que $a^2(b^2 + c^2) = b^4 + c^4$
Propiedades de este triángulo:
i) $\Omega\Omega' \perp BC$
ii) Ω y Ω' están situados respectivamente sobre h_b y h_c
iii) El centro del círculo de Brocard está sobre la mediana AG
iv) La mediana desde C y la altura desde B se cortan sobre la simediana AK.
v) El ortopolo de la recta de Euler es un punto de AG
vi) K está en la paralela a BC trazada por el punto de coordenadas baricéntricas (a^4, b^4, c^4)
vii) La recta H_bH_c pasa por el punto medio de la tercera altura, h_a.
viii) $HO \perp AK$
ix) $\cot^2 A = \cot B \cot C$
x) $\cos(B - C) = \frac{bc}{a^2}; \frac{\cos B}{\cos C} = \frac{c^3}{b^3}; \frac{\cot A}{\cot B} = \frac{\cot C}{\cot A} = \frac{b^2}{c^2}$
Estos resultados son de V. Thébault.

III.14 El triángulo escaleno en el que una altura, una bisectriz y una mediana son iguales
Supongamos ABC tal que $h_a = w_b = m_c$.
i) El ángulo B es raíz de la ecuación

$$\sin(30^\circ \pm B)\left(1 - \sin\frac{B}{2}\right) = \sin\frac{B}{2}$$

ii) Poniendo $t = \frac{a}{c}$ se obtiene

$$4t^5 - 24t^4 + 49t^3 + 21t^2 - t - 1 = 0$$

(Lemoine y Delahaye, 1890 y 1906)

III.15 El triángulo en el que la altura desde A, la bisectriz desde B y la mediana desde C son concurrentes

Propiedades de este triángulo:

i) $(a+c)(b^2-c^2) = a^2(a-c)$

ii) $\cos B = \frac{a}{a+c}$

iii) $\tan B = \sin A : \cos C$

iv) $\tan C = \tan^2 B \tan \frac{B}{2}$

v) Si $\widehat{C} > 90º$, h_a y m_c se cortan sobre la bisectriz exterior desde B.

(Déprez, 1889 y Lemoine, 1885)

III.16 El triángulo en el que el pie de la bisectriz exterior desde A, el pie de la mediana desde B y el de la altura desde C están en línea recta

Propiedades de este triángulo:

i) $c\cos A = a\cos B$

ii) $\cos A = \frac{c}{b+c}$

iii) $\cos B = \frac{c^2}{a(b+c)}$

iv) $BH_c = AH_b$

v) La perpendicular en B sobre AB corta a AC en un punto L tal que $CL = c$.

(Delahaye, *Mathesis* 1906)

III.17 El triángulo en el que la recta H_aH_b pasa por el simétrico de A con respecto a O

Propiedades de este triángulo:

i) $\cos 2C - \cos 2A - 3\cos 2B = 1$

ii) $a^2 + 3b^2 - c^2 = 8R^2$

(*Barisien*, *Mathesis* 1914)

III.18 El triángulo donde la circunferencia circunscrita y la de los nueve puntos son ortogonales

Propiedades de este triángulo:

i) $HO = R\sqrt{5}$

ii) $\cos A\cos B\cos C = -\frac{1}{2}$

iii) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 1$

iv) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1$

v) $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$

vi) $\cot\omega = R^2/S = 1/(2\sin A\sin B\sin C)$

III.19 El triángulo con dos simedianas perpendiculares

Supongamos $BK \perp CK$. Entonces se tiene:

i) Uno de los ángulos, $\widehat{B}$ o $\widehat{C}$, es obtuso.

ii) $a^4 = b^4 - 4b^2c^2 + c^4$

iii) $2\sin^2 A + \tan B\tan C = 0$

iv) $\widehat{BGC} = 90º + A$

v) La circunferencia circunscrita a BGC pasa por los puntos de intersección de AB, AC respectivamente, con las perpendiculares a AC en C, a AB en B.Tiene como centro el punto $T_a = t_b \cap t_c$, siendo t_b la tangente en B a la circunferencia circunscrita a ABC en B (análoga definición para t_c), y como radio T_aB.

Problemas sobre triángulos especiales definidos por relaciones entre sus lados u otros segmentos del triángulo

Problema 60 : *Si los lados del triángulo ABC verifican*

$$(b+c)\sqrt{2} = a+b+c,$$

probar que GI pasa por el pie de la altura desde A.(*Mathesis* 1935)

Problema 61: *Los lados de un triángulo están en progresión geométrica, y además verifican* $\frac{c-a}{a} = \frac{b}{c+a}$. Determinar los ángulos.

(Agrégation 1880)

Problema 62: *Los lados de un triángulo verifican*

$$b^2+c^2 = (b+c)a.$$

Probar que r_a, r_b, r_c *están en progresión geométrica.* (*Gazeta Matematica* 1962)

Problema 63 : *Si dos medianas (simedianas) son perpendiculares, las simedianas (medianas) correspondientes cortan al círculo circunscrito en dos puntos diametralmente opuestos, y recíprocamente. El triángulo podario de K (de G) es rectángulo.* (*Thébault, en Mathesis* 1945)

Problema 64 : *El triángulo ABC es tal que la mediana y la simediana desde A son perpendiculares. Entonces*:

i) $a^2 = -2bc\sqrt[3]{\cos A}\left(\sqrt[3]{\cos A}+1\right),\ A > 90^\circ$

ii)

$$\frac{b^2+c^2}{2bc} = \frac{m_a}{s_a}.$$

Problema 65 : *Encontrar la condición para que las simedianas BK, CK sean perpendiculares.*(*Mathesis*, 1903)

Problema 66: *En el triángulo ABC, la altura desde A, la bisectriz desde B y la mediana desde C son concurrentes o tienen sus pies en línea recta, según que los productos* $\sin A\cos B, \sin B\cos C$ sean iguales u opuestos. (Mathesis, 1958)

Problema 67: *Si en el triángulo ABC, OIH es isósceles, entonces*

$$OH = \max(a,b,c) - \min(a,b,c).$$

(Gazeta matematica 9/1995)

Problema 68: *Demostrar que si el círculo circunscrito a ABC es tangente al de los* 9 *puntos, entonces*

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2.$$

Problema 69: *Si el círculo inscrito en ABC pasa por O, calcular* $\frac{R}{r}$ *y probar que*

$$\cos A + \cos B + \cos C = \sqrt{2}.$$

Problema 70: *Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la mediana desde B sea dividida en tres partes iguales por el círculo inscrito, es que entre los lados del triángulo se verifique*

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}.$$

(Kvant, revista escolar rusa)

Equivalencias observadas entre unas definiciones de triángulos especiales y otras

Los triángulos definidos por las condiciones II.7 y III.7 son los mismos, así como los definidos por las parejas $(II.13, III.10)$ y $(II.14, III.13)$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI