Cinco problemas de la Olimpiada Británica

Soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España

1996,#1

Una función *f* está definida para todos los enteros positivos y satisface

$$f(1) = 1996, \qquad\qquad f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2 f(n), \quad \forall n > 1.$$

Calcular el valor exacto de *f*(1996).

Solución

Demostraremos por inducción que

$$f(n) = \frac{3992}{n(n+1)}.$$

Obviamente, la hipótesis de inducción se cumple para *n*=1. Supongamos que se cumple hasta *n*=*m*. Entonces, para *n*=*m*+1, se tiene:

$$f(m+1) = \frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(m)}{(m+1)^2 - 1} = \frac{m^2 f(m)}{m^2 + 2m} = \frac{m}{m+2}\frac{3992}{m(m+1)} = \frac{3992}{(m+1)(m+2)}.$$

Luego la hipótesis de inducción se cumple para todo *n*. En particular,

$$f(1996) = \frac{3992}{1996 \cdot 1997} = \frac{2}{1997}.$$

1995,#1

Hallar todos los cuadrados perfectos que terminan en tres cuatros. Probar que ningún cuadrado perfecto puede terminar en cuatro cuatros.

Solución

Sea x un entero positivo tal que su cuadrado termina en tres cuatros. Entonces, $x^2-144=(x+12)(x-12)$ acaba en 300, es decir, $(x+12)(x-12)$ es múltiplo de 4 pero no de 8, y es múltiplo de 25. Si x fuera impar, el producto anterior sería impar. Si x fuera múltiplo de 4, el producto anterior sería múltiplo de 16, pues tanto $x+12$ como $x-12$ sería múltiplos de 4. Luego x es par pero no múltiplo de 2. Entonces, $x+12$ y $x-12$ son pares, y como no pueden ser simultáneamente múltiplos de 5, uno u otro es divisible por 50 pero no por 100. Luego x acaba en 38 o 62. Como 62+38=100, nos basta entonces considerar cualquier entero de la forma $x=100y+38$, pudiendo ser y un entero positivo o negativo. Entonces,

$$x^2=\left(100y+38\right)^2=10^4y^2+7600y+1444.$$

Para que este número acabe en tres cuatros, $7600y$ debe acabar en tres ceros, luego y debe ser múltiplo de 5, acabando en 5 o 0. Pero entonces $7600y$ acaba en 8000 o 6000, luego x^2 acaba en 9444, 3444, 7444 o 5444, y ningún cuadrado perfecto puede acabar en cuatro cuatros. Además, los cuadrados perfectos que acaban en tres cuatros son todos los de la forma $(500z+38)^2$, con z tomando cualquier valor entero, positivo o negativo.

1993,#3

Para cada entero positivo c, la sucesión de enteros $\{u_n\}$ se define mediante

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = c, \qquad u_n = (2n+1)u_{n-1} - (n^2-1)u_{n-2}, \quad n \ge 3.$$

Determinar los valores de c para los que esta sucesión tiene la siguiente propiedad:

u_i divide a u_j siempre y cuando $i \le j$.

Solución

Es trivial comprobar por sustitución que

$$u_3 = 7u_2 - 8u_1 = 7c - 8; \qquad u_4 = 9u_3 - 15u_2 = 24(2c-3);$$

$$u_5 = 11u_4 - 24u_3 = 120(3c-5); \qquad u_6 = 13u_5 - 35u_4 = 120(25c-44).$$

Como $u_2=c$ debe dividir a u_3, entonces c debe dividir a 8. Además, para $c=1$, 240 divide a u_5 pero no a u_6, mientras que para $c=8$, 16 divide a u_3 pero no a u_4. Luego sólo puede ser $c=2$ o $c=4$. Demostraremos por inducción que, en ambos casos, y para $n \ge 2$,

$$u_n = (n+c-2)u_{n-1}.$$

La hipótesis de inducción se cumple trivialmente para $n=2$. Supongamos que la hipótesis se cumple para $n=m$. Entonces, para $n=m+1$,

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= (2m+3)u_m - (m^2+2m)u_{m-1} = \left[(2m+3)(m+c-2) - (m^2+2m)\right]u_{m-1} \\ &= (m^2 + 2mc - 3m + 3c - 6)u_{m-1} = \left[(m+c-2)(m+c-1) - (c-2)(c-4)\right]u_{m-1}. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $c=2$ o $c=4$,

$$u_{m+1} = (m+c-2)(m+c-1)u_{m-1} = (m+c-1)u_m = \left[(m+1)+c-2\right]u_m,$$

cumpliéndose entonces la hipótesis de inducción para todo n. Al ser $n+c-2>1$ para $n \ge 2$, se tiene que u_{n-1} divide a u_n con $u_n > u_{n-1}$. Es trivial entonces demostrar por inducción sobre k que, para $n \ge 2$, u_{n-k} divide a u_n pero no al revés, que es obviamente cierto para $k=1$, y como $u_{n-(k+1)}$ es menor que y divide a u_{n-k}, y éste divide a u_n, entonces $u_{n-(k+1)}$ es menor que y divide a u_n. Luego u_i divide a u_j siempre y cuando $i \le j$, si y sólo si $c=2$ o $c=4$.

1991,#3

ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio *r*. Las diagonales *AC* y *BD* se cortan en *E*. Probar que, si *AC* es perpendicular a *BD*, entonces

$$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4r^2 .$$

¿Es cierto que, si se cumple la anterior igualdad, entonces *AC* es perpendicular a *BD*? Justifique la respuesta.

Solución

Si *E* coincide con el centro *O* de la circunferencia, *EA*=*EB*=*EC*=*ED*=*r*, cumpliéndose trivialmente la relación. Supondremos durante el resto del problema que esta situación no se da.

Supongamos que *AC* y *BD* son perpendiculares. Aplicando el teorema de Pitágoras,

$$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = AB^2 + CD^2 = 4r^2\left[\sin^2\left(\angle ACB\right) + \sin^2\left(\angle CBD\right)\right].$$

Ahora bien, al ser *BEC* rectángulo en *E*, se tiene que la suma de estos dos ángulos es

$$\angle ACB + \angle CBD = \angle BCE + \angle CBE = p - \angle BEC = \frac{p}{2} .$$

Luego sus senos al cuadrado suman 1, de donde se obtiene la igualdad del enunciado.

Supongamos ahora que se da la igualdad del enunciado, pero que ni *E* coincide con *O*, ni *AC* y *BD* son perpendiculares. Sean entonces *B*' y *D*' los puntos donde la perpendicular a *AC* por *E* corta a la circunferencia. Por el resultado anterior, y asumiendo que se da la relación del enunciado, se tiene que

$$EB'^2 + ED'^2 = EB^2 + ED^2 = 4r^2 - EA^2 - EC^2 .$$

Pero además, por el teorema de la potencia, *EB*·*ED*=*EB*'·*ED*'. Luego

$$\left(EB' + ED'\right)^2 = \left(EB + ED\right)^2; \qquad \left(EB' - ED'\right)^2 = \left(EB - ED\right)^2,$$

y, sin pérdida de generalidad, *EB*=*EB*' y *ED*=*ED*'. Como además *E* y *O* no coinciden por hipótesis, *B* y *B*' son simétricos con respecto a *OE*, y también lo son *D* y *D*'.

De aquí se deduce que la igualdad del enunciado se da si y sólo si se cumplen una de las tres siguientes condiciones:

1) *AC* y *BD* se cortan en el centro *O* de la circunferencia circunscrita a *ABCD*.
2) *AC* y *BD* son perpendiculares.
3) *BD* y la perpendicular a *AC* por *E* son simétricas con respecto a la recta *OE*.

1998,#1

Hallar todos los enteros a,b,c tales que

$$(x-a)(x-10)+1=(x+b)(x+c) \quad \text{para todo } x.$$

Solución

La igualdad se debe cumplir en particular para x=10, luego

$$1=(b+10)(c+10).$$

Por lo tanto, como los dos factores en el miembro de la derecha son enteros, sus valores absolutos deben ser iguales a 1, ambos con el mismo signo, siendo entonces bien b=c=–9, bien b=c=–11. Tomando entonces x=0, se deduce que 10a+1 debe valer, respectivamente, 81 y 121, siendo entonces a=8 y a=12. Luego (a,b,c) es igual bien a (8,–9,–9), bien a (12,–11,–11).

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: