Problemas difíciles, creados por estudiantes de alto rendimiento

Emilia Angelova Velikova,
Svetoslav Jordanov Bilchev
Centre of Applied Mathematics and Informatics,
Pedagogical Faculty, University of Rousse,
Bulgaria

Panayiotis Vlamos
Technical University of Athens, Greece

Abstract. **The paper examines new hard problems created by gifted students as a results of experiment held in Bulgaria and Greece (2001, 2002). Corresponding to the aim of the experiment to stimulate the mathematical creativity of gifted students there was applied special methodology of education in the area of transformations.**

El experimento realizado en Bulgaria y Grecia (2001, 2002) para estimular la creatividad matemática de estudiantes de alto rendimiento de los grados 9 a 12 (15 a 18 años de edad), ha sido llevado a efecto por medio de un rico arsenal metodológico. Los resultados muestran que el carácter creativo del estudiante como generador de problemas, el desarrollo de la creatividad, la realización de tareas, hábitos de investigación y aplicación de los conocimientos del estudiante están determinados en gran medida por los métodos de enseñanza aplicados, y en menor medida por los niveles de las características incluidas en la tecnología del diagnóstico aplicada para el descubrimiento de estudiantes creativos.

La metodología de la educación de estudiantes de talento para crear problemas por medio de transformaciones incluía :

1. El examen de muchas clases de problemas de competiciones que se podían resolver más fácilmente por transformaciones. Entre otras técnicas :
   - ♦ Cotas superiores e inferiores óptimas para funciones;
   - ♦ Ecuaciones, igualdades, desigualdades, sistemas.
2. El examen de transformaciones de tipo empírico, cuyas formulas son conocidas por los estudiantes; y la aplicación de esas transformaciones para resolver problemas de competiciones y crear otros nuevos.
3. El estudio de los métodos de actividad creativa –los procesos de creación de transformaciones T_ℓ, T_ℓ^{-1}, Transformación del Paralelogramo

(PT), Transformación Dual de la mediana (MDT), sus combinaciones y aplicaciones científicas [1, 5], para la creación de nuevos problemas en el campo de las "Desigualdades geométricas y mixtas para los triángulos".
Presentamos algunos problemas difíciles creados por los estudiantes.

Problema 1 (A. Velikov). Probar la desigualdad asimétrica:

(1) $$5\sum ab \geq 4 + 9abc\ ,$$

donde *a, b, c* son los lados de un triángulo de perímetro 2.

Solución. Primero aplicamos la desigualdad de Schur:

(2) $$\sum\left[x^{\lambda}(x-y)(x-z)\right] \geq 0,\ \lambda \geq 0,\ x,y,z>0\ .$$

La igualdad se produce cuando $x=y=z$.

Segundo, si $\lambda=1$, de (2) se sigue

(3) $$\sum\left[x(x-y)(x-z)\right] \geq 0,\ x,y,z>0 \quad \Leftrightarrow$$

(4) $$\sum x^3 + 3xyz \geq \sum x^2(y+z), \quad x,y,z>0\ .$$

Por otra parte

(5) $$\sum x^3 = (x+y+z)^3 - 6xyz - 3\sum x^2 y$$

(6) $$\sum x^2 y = (x+y+z)\sum xy - 3xyz\ .$$

Sustituyendo (5) y (6) y usando la condición $x+y+z=1$ en (4) obtenemos

(7) $$1+9xyz \geq 4\sum xy,\ x+y+z=1.$$

Aplicamos a (7) la transformación

(8) $$T_{xa}(1):\ y+z=a,\ z+x=b,\ x+y=c,\ x+y+z=1,$$

donde *a, b, c* son los lados del triángulo, es decir,

$$x=1-a,\ y=1-b,\ z=1-c,\ a+b+c=2.$$

Resulta (1).

Observación. Si aplicamos a (7) la transformación:

(9) $$x+y=\frac{c}{s},\ y+z=\frac{a}{s},\ z+x=\frac{b}{s}$$

entonces resulta la cota inferior optima para s^2 como una función cuadrática en *R, r*: GI5.8: $s^2 \geq 16Rr - 5r^2$ [2].

Problema 2 (A.Velikov). Probar la desigualdad:

(10) $$8m_a^2 m_b^2 m_c^2 \geq \prod(m_a+m_b)(m_a+m_b-m_c),$$

donde m_a, m_b, m_c son las medianas del triángulo de lados *a, b, c*.

Solución. Primero probaremos la desigualdad

(11) $$8a^2b^2c^2 \geq \prod (a+b)(a+b-c),$$

donde *a, b, c* son los lados de un triángulo arbitrario [3].

Aplicando a (11) las siguientes fórmulas

$\prod (a+b) = 2s\left(s^2 + r^2 + 2Rr\right)$ [4], $abc = 4RF$, $2s.\prod (a+b-c) = 16F^2$

se obtiene

(12) $$8R^2 \geq s^2 + r^2 + 2Rr.$$

Con esta desigualdad es fácil encontrar la cota superior optima para s^2 como una función cuadrática en *R, r*:

(13) GI5.8: $s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ y

(14) GI5.1 $R \geq 2r$ (Desigualdad de Euler).

Si la desigualdad (12) es cierta, entonces la desigualdad (11) es cierta también. La igualdad en (11) ocurre cuando $a = b = c$.

Ahora aplicamos a (11) la transformación $a = m_a,\ b = m_b,\ c = m_c$ y se demuestra (10).

Observación. Si aplicamos a (11) la transformación

(15) $$T_{ax} : a = y + z,\ b = z + x,\ c = x + y,\quad x, y, z > 0$$

entonces demostramos la desigualdad (que es un problema Nuevo):

(16) $$8\prod (x+y)^2 \geq xyz \prod (2x + y + z),$$

donde $x, y, z > 0$.

Problema 3 (A.Velikov). Sean *a, b, c, s, F* los elementos usuales del triángulo, con $\mathrm{F} = \sqrt{\mathrm{s}}$. Probar que

(17) $$\sum \frac{1}{(\mathrm{s}-\mathrm{a})^3 \mathrm{a}} \geq \frac{3}{2}.$$

Solución. Aplicamos T_{ax} a (17) y obtenemos

(18) $$\sum \frac{1}{x^3(y+z)} \geq \frac{3}{2},\quad xyz = 1$$

(de la condición $F = \sqrt{s}$ y $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ se deduce que $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)} = 1$ y $xyz = 1$). Este es un problema conocido [1] y puede probarse por la transformación

(19) $\qquad u=\frac{1}{x},\ v=\frac{1}{y},\ t=\frac{1}{z},\ uvw=1$

y la desigualdad de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz.
Probaremos (16) a partir de la desigualdad (18), que es cierta, aplicando la transformación inversa de T_{ax}

(20) $\qquad T_{xa}: y+z=a,\ z+x=b,\ x+y=c$ con $F=\sqrt{s}$.

Las igualdades se verifican en (18) si $x=y=z=1$ y en (16) si $a=b=c=2$.

Problema 4 (D.Stoyanov). Probar la desigualdad

(21) $$4\sum\frac{1}{a}-\sum\frac{a}{bc}\leq\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{r}+\frac{5}{R}\right),$$

donde *a, b, c, r, R* son los elementos habituales de un triángulo arbitrario.
Solución. De las desigualdades bien conocidas GI 5.11 y GI 7.2 obtenemos

(22) $$3\sqrt{3}r\leq s\leq\frac{\sqrt{3}}{3}(4R+r),$$

de la que se deduce

(23) $$s^2-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}R+\frac{10\sqrt{3}}{3}r\right)s+3r(4R+r)\leq 0\ \Leftrightarrow$$

(24) $$s^2+12Rr+3r^2\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}(2R+5r)s.$$

Aplicando las fórmulas $s^2+4Rr+r^2=\sum bc$ [4], $2s^2=\sum a^2+2\sum bc$ transformamos (24) en la desigualdad

(25) $$4\sum bc-\sum a^2\leq\frac{4\sqrt{3}}{3}(2R+5r)s\ \ \Leftrightarrow$$

(26) $$4\sum bc-\sum a^2\leq\frac{4\sqrt{3}}{3}(2R+5r).\frac{abc}{4R}.\frac{1}{r}\ \ \Leftrightarrow (21).$$

Observación. Lo anterior es la base para resolver los dos problemas siguientes.

Problema 5 (D.Stoyanov). Probar la desigualdad

(27) $$4\sqrt{3}.\frac{xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2}{2(x+y)(y+z)(z+x)+5xyz}\leq\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}},\quad x, y, z>0.$$

Solución. Aplicando la transformación

(28) $$T_{ax}: a=y+z,\ b+z+x,\ c=x+y,\ s=\frac{1}{2}\sum a=\sum x,$$
$$F=\sqrt{s\prod(s-a)}=\sqrt{xyz.\sum x},\ \ R=\frac{abc}{4F}=\frac{\prod(x+y)}{4.\sqrt{xyz\sum x}},$$
$$r=\frac{F}{s}=\sqrt{\frac{xyz}{\sum x}},\ \ r_a=\frac{F}{s-a}=\frac{\sqrt{xyz\sum x}}{x},\ \ x, y, z>0,$$
a (21) obtenemos la desigualdad

(29) $$4\sum\frac{1}{y+z}-\sum\frac{y+z}{(z+x)(x+y)}\le\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2\sqrt{x+y+z}}{\sqrt{xyz}}+\frac{5\sqrt{xyz(x+y+z)}}{\prod(x+y)}\right).$$

La desigualdad (27) se sigue de (29) por medio de cálculos complicados.

Problema 6 (D.Stoyanov). Probar la desigualdad

(30) $$\frac{8m_c(a+b)-2(a-b)^2-a^2-b^2+c^2}{(a+b+2m_c)abm_c+10F^2}.F\le 2\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,$$

donde $a, b, c, m_a, m_b, m_c, F$ son los elementos usuales de un triángulo.
Solución. Aplicando la MDT [1]

(31) $$a=a,\ b=b,\ c=2m_c,\ F=F,\ r=\frac{F}{\frac{1}{2}(a+b+2m_c)},\ R=\frac{ab2m_c}{4F}$$

a (21) obtenemos la desigualdad (32):

$$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{2m_c}\right)-\left(\frac{a}{b2m_c}+\frac{b}{2m_ca}+\frac{2m_c}{ab}\right)\le\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2.\frac{1}{2}(a+b+2m_c)}{F}+\frac{5.4F}{ab2m_c}\right)$$

que transformamos en (30) por cálculos difíciles.

Problema 7 (D.Peev). Probar que

(33) $$73s^4+81r^4+234s^2r^2-1224s^2rR+648r^3R+1296r^2R^2\ge 0,$$

donde *s, r, R* son los elementos habituales del triángulo.
<u>Solución.</u> aplicamos a la desigualdad conocida (de "Kvant")

(34) $\sum x^4 + 2xyzt \geq x^2y^2 + x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2, x, y, z, t > 0$

la transformación

(35) $$T : x = s - a,\ y = s - b,\ z = s - c,\ t = \frac{s}{3},$$

donde *a, b, c, s* son los elementos usuales del triángulo y obtenemos una nueva desigualdad (36):

$$\sum(s-a)^4 + \left(\frac{s}{3}\right)^4 + 2.\frac{s}{3}.\prod(s-a) \geq \sum(s-a)^2(s-b)^2 + \frac{s^2}{9}.\sum(s-a)^2.$$

Calculamos:

(37) $$\sum(s-a)^4 = 3s^4 - 4s^3\sum a + 6s^2\sum a^2 - 4s\sum a^3 + \sum a^4 = s^4 - 16s^2Rr + 2r^2(4R+r)^2;$$

(38) $$\sum(s-a)^2(s-b)^2 = r^2\left[(4R+r)^2 - 2s^2\right];$$

(39) $$\sum(s-a)^2 = s^2 - 2r(4R+r)$$

con ayuda de las fórmulas [4]: $\sum a^2 = 2(s^2 - r^2 - 4Rr)$,

$\sum a^3 = 2s(s^2 - 3r^2 - 6Rr)$, $\sum a^4 = 2s^4 - 4r(4R+3r)s^2 + 2r^2(4R+r)^2$.

Aplicando (37), (38) y (39) a (36) obtenemos (33).

Creemos que estos problemas son suficientes para mostrar el alto nivel de creatividad de los estudiantes, desarrollado al aplicar la especial metodología de este experimento.

Referencias bibliográficas

[1] Bilchev, S.J. & E.A.Velikova, Transformations for a Triangle and Some Applications, Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of the Seventeenth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Sunny Beach, April 6-9, 1988, Sofia, Bulgarian Academy of Sciences, 1988. pp.9-19.
[2] Bottema, O. & others Geometric Inequalities. The Wolthers-Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1969.
[3] Hitov, H Geometry of the Triangle, Narodna prosveta, Sofia, Bulgaria, 1991.
[4] Soltan, V.P. & S.I.Mademan Equalities and Inequalities in the triangle, Kishinev, Stiintca, 1982.
[5] Velikova, E.A. & S.J.Bilchev The Method of Transformations for Solving Trigonometric and Mixed Inequalities, Geometry & Mathematics Competitions, Isfahan, Iran, 1998. pp.106-117.

Emilia Angelova Velikova e-mail: emily@ami.ru.acad.bg
Svetoslav Jordanov Bilchev e-mail: slavy@ami.ru.acad.bg
Panayiotis Vlamos e-mail: vlamos@vlamos.com