Algunos problemas. La coloración en las matemáticas

La coloración en las matemáticas no es más que aprovechar algunas diferencias que establecemos entre los entes empleados en un problema particular, similar a la utilidad de las nemotecnias en la programación, lógica, matemática, etc. Escrito en un lenguaje coloquial, lograr una identificación con el problema que lo haga más entendible y fácil de trabajar, en fin más digerible.

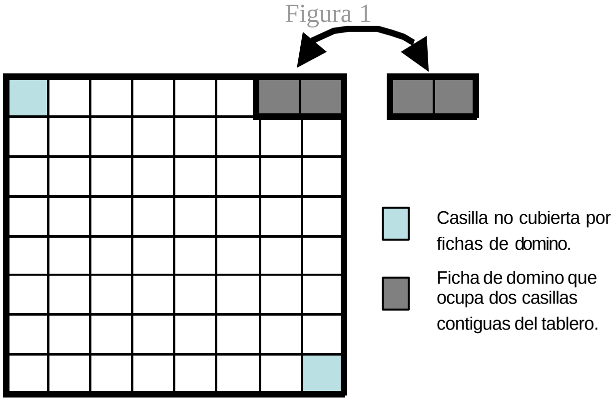
Por ejemplo si necesitados diferenciar dos dados de juegos de azar, diremos que uno de ellos es azul y el otro es rojo. Sin embargo bastaría decir que uno de los dos está limpio y el otro no lo está. O lo que es lo mismo, establecer una diferencia entre ambos entes aunque esta sea poco perceptible.

Además a través de las diferencias marcadas en los entes, encontramos problemas que resultan impenetrables a priori por el desconocimiento de esta técnica y a posteriori resultan sencillos de resolver y entender. En vista a lograr un conocimiento inicial de las coloraciones en los tableros está hecho este escrito. Con el objetivo de que estudiantes concursantes en olimpiadas o aspirantes a ellas, incluyan esta arma en su arsenal para atacar y solucionar los diferentes problemas.

Problema inicial.

Tenemos un tablero de 8x8 y 31 fichas de domino que tienen la particularidad de que cada una de ellas puede ocupar exactamente la región de dos casillas contiguas del tablero (como se muestra en la figura 1). Se quiere colocar las 31 fichas de domino en el tablero de manera que quede el tablero cubierto por fichas de domino excepto las dos casillas de los extremos de la diagonal principal. De ser posible determine la distribución de las fichas de domino.

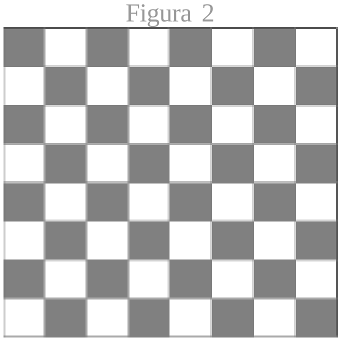
Figura 1



Solución:

Coloreando el tablero con casillas de dos colores al estilo del tablero de coronas (damas) como se muestra en la figura 2.

Figura 2



Tenemos que cada ficha del domino al ser colocada en el tablero de manera que ocupe dos casillas contiguas (ya sea vertical u horizontal) ocupa una casilla blanca y una casilla negra o sea al colocar las 31 fichas estas ocuparan 31 casillas negras y 31 casillas blancas por lo que resultaría imposible que al colocar las 31 fichas queden por cubrir dos casillas negras. Y por tanto resulta imposible colocar las 31 fichas del domino de manera que queden libre los extremos de la diagonal principal.
En este caso lo aprovechable de la coloración fue que dos casillas con un lado común del tablero tienen una coloración diferente. La coloración empleada fue la más común de dos colores.

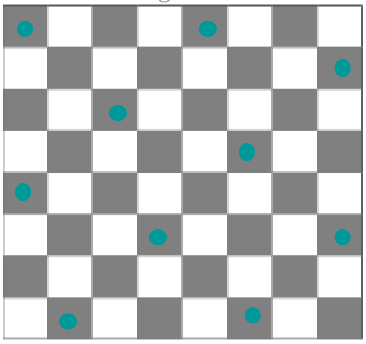
El caballo del ajedrez.
Esta misma coloración tiene la particularidad de que el caballo del ajedrez salta de una casilla del tablero a otra de color diferente. Por eso precisamente no se puede en un tablero de 5x5 comenzar un recorrido con movidas de caballo de ajedrez, iniciando en una de sus casilla, pasar por todas sin repetir ninguna y terminar en la casilla inicial con movidas de un caballo. Pues para que se pudiera realizar debemos tener una cantidad idénticas de casillas negras y casillas blancas (no puede ser impar).

Problema 3 de la 40º IMO, Bucarest, Rumania 1999.
Veamos pues otras bondades de la misma coloración a través del problema 3 de la 40º IMO, Bucarest, Rumania 1999.

Se considera un tablero cuadrado de n x n, donde n es un entero positivo par. El tablero se divide en n^2 cuadrados unitarios. Decimos que dos cuadrados distintos del tablero son *adyacentes* si tienen un lado en común.
Se marcan N cuadrados unitarios del tablero de tal manera que cada cuadrado (marcado o sin marcar) es adyacente a por lo menos un cuadrado marcado.
Determinar el menor valor posible de N.

Solución:
Si coloreamos el tablero de nxn con dos colores negro y blanco como en la figura 2, notaremos que las casillas adyacentes a las blancas son negras y a las negras son blancas. Por tanto se deduce que para que todas las casillas blancas tengan alguna casilla adyacente marcada, debemos buscar sólo en las marcadas negras y viceversa. De donde concluimos que el número mínimo de casillas blancas marcadas es igual al número mínimo de casillas negras marcadas debido a que n es par y hay simetría en el tablero coloreado.
Hasta aquí tenemos un por ciento del problema pero no sabemos cuál es la cantidad mínima de casillas marcadas sólo conocemos que es par. Si realizamos una coloración sobre las casillas negras como se muestra en la figura 3 (marcando en las diagonales negras impares las posiciones impares) tendremos entonces k casillas negras marcadas, las cuales cumplen que todas las casillas blancas son adyacente a alguna de ellas, indicando esto que el valor mínimo de casillas negras marcadas es menor o igual a k. Pero por otra parte notemos que estas k casillas negras marcadas están distribuidas de forma tal que las casillas blancas a marcar que sean adyacentes a ellas son diferentes, lo cual nos dice que el valor mínimo de casillas blancas marcadas es mayor o igual a k. Y como teníamos que el número mínimo de casillas blancas marcadas es igual al número mínimo de casillas negras marcadas entonces el menor valor posible de N es 2k, pero k coincide con la suma 1 + 2 + 3 +…+ n/2. Por lo que concluimos que el menor valor posible es N = r(r +1) donde r = n/2.

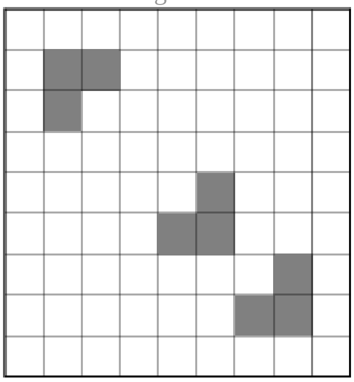
Figura 3



Problema de pepito.

Un niño (pepito) tratando de completar un puzzle ha colocado tres de sus piezas (todas de la misma forma) que ocupan las posiciones que muestra la figura 4. ¿Será posible completar el puzzle con esas tres piezas fijadas?

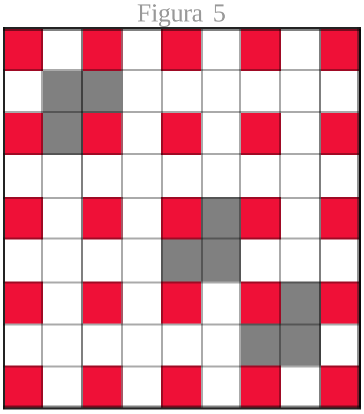
Figura 4



Solución:

Notemos que dicho tablero es de 9x9, por lo que sería 27 piezas cada una ocupando 3 casillas del tablero. Si empleamos una coloración de dos colores Blanco y Rojo como se indica en la figura 5, donde también están presentes las tres piezas colocadas por pepito. Entonces notaremos que ninguna de las tres piezas colocadas ocupa alguna de las casillas rojas y que por demás cada casilla roja será cubierta por piezas distintas, de ser posible tal cubrimiento del tablero, gracias a forma de las fichas.

Figura 5



Bajo estas condiciones la cantidad de piezas a utilizar nunca será menor que la cantidad de casillas rojas (25) más tres por las fichas ya puestas, o sea 28 lo cual entra en contradicción total con que sea realmente 27 piezas para cubrir el tablero de 9 x 9 puesto que 3 x **27** = 81. Por tanto tenemos que la operación de cubrir el tablero con las piezas del puzzle apoyados en las colocadas por pepito es imposible.

Problema 5 de la II OIMU

Veamos una coloración de 5 colores la cual fue empleada para resolver el problema 5 de la II OIMU (2 de octubre de 1999).

En el juego *tetris-5* se utilizan cuatro tipos de fichas que tienen una de sus caras pintadas de negro y otra de blanco tal como se muestran en la siguiente figura.
Las fichas pueden ser colocadas en un tablero cuadriculado de $m \times n$ en cualquier posición siempre y cuando no se superpongan y tengan la cara negra hacia arriba.
(a) Demostrar que se puede recubrir un tablero de 8 x 8 que no contiene sus cuatro esquinas.
(b) Demostrar que no se puede recubrir un tablero de 1999 x 2001 que no contiene a sus cuatro esquinas.

Solución

En el problema se utilizan los cuatro tipos de fichas del juego *tetris-5,* con las caras de un color fijo hacia arriba indica que sólo se pueden rotar las piezas (figura 6).
Para resolver el inciso *a* basta con dedicar un poco de nuestro tiempo, ya para el inciso b no apoyaremos en una coloración.

Figura 6

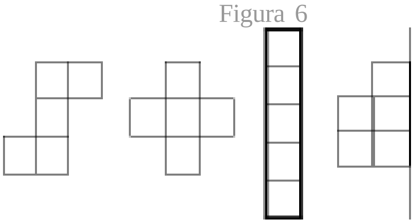
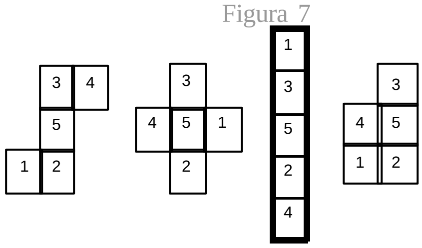


Figura 7



La coloración empleada en este problema puede ser de cinco colores c_1, c_2, c_3, c_4 y c_5 los cuales por filas aparecerán cíclicamente en ese orden y por columnas cíclicamente omitiendo uno de ellos pero manteniendo el orden. En la figura 7 se muestra una posible ubicación de las coloraciones de las casillas que ocupan las fichas. Donde todas cubren una casilla de cada color, solo faltaría analizar las rotaciones y traslaciones de las piezas que también cubrirán una casilla de cada color.
Con esta coloración notemos que nuestro tablero de 1999x2001 presenta 800 000 casillas de los colores c_1, c_2, c_3 y c_5, pero 799 999 casillas de color c_4. Y las esquinas del tablero son las superiores de color c_1 y las inferiores de color c_2. Lo cual entra en contradicción con que cada piezas cubra una casilla de cada color, pues al colocar 799 999 fichas sin superposición dejamos libres 4 casillas de colores distintos.

Hints para el problema 3 de la 34º IMO, Turquía 1993

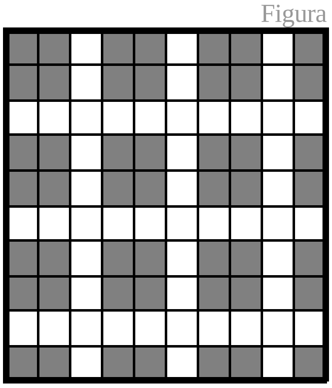
Veamos dos coloraciones de dos y tres colores que nos ayudan a solucionar el problema 3 de la 34º IMO, Turquía 1993.

En un tablero de ajedrez infinito, un partido es jugado como sigue. Para comenzar, n^2 piezas son colocadas en un tablero de n x n cuadrados contiguos, una pieza en cada cuadro. Un movimiento en el juego es un salto en una dirección horizontal o vertical

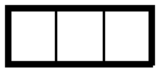
sobre un cuadrado adyacente ocupado a un cuadrado desocupado .La pieza que ha sido saltada es eliminada.
Encuentra esos valores de n para que el juego pueda acabar con sólo una pieza en el tablero.

La solución del problema es para n no divisible por 3. En una de las vías de demostración se plantean explícitamente las soluciones para n=2 y n=4, y con ayuda de un proceso inductivo se reduce de otras dimensiones mayores a estas. Luego para demostrar que para n divisible por 3 no es posible que el juego acabe con una sola pieza nos podemos apoyar en las dos coloraciones mostradas en la figura 8:
Una de tres colores a, b y c coloreando cíclicamente y manteniendo el orden por filas y por columnas. La característica de esta coloración que nos permite resolver el problema es que en cada movida del juego intervienen tres casillas adyacentes en fila o en columna y por tanto cada una de color diferente. La segunda coloración de la figura 8 es de dos colores blanco y negro donde la peculiaridad es que tres casillas adyacentes por filas o por columnas cubren en cualquiera de sus variantes una cantidad par de casillas negras o sea ninguna o dos.

Figura 8



a	b	c	a	b
b	c	a	b	c
c	a	b	c	a
a	b	c	a	b
b	c	a	b	c

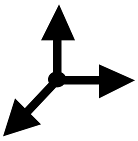


Otras coloraciones para estrategias de movimientos.
Supongamos que en cierto juego existe una ficha que se mueve por un tablero en tres direcciones posibles pero sólo avanza de una en una las casillas:

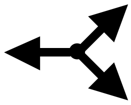
Si las tres direcciones en que se mueve la ficha son las mostradas en la figura 9, la coloración a utilizar puede ser la mostrada en la misma figura 9, o sea de tres colores *a*, *b* y *c* por filas coloreando cíclicamente manteniendo el mismo orden y por columnas de forma cíclica, omitiendo uno de los colores y manteniendo el orden. Con esta coloración aprovechamos que la ficha de una casilla de color *a* sólo puede llegar a una de color *b*, también tenemos que la ficha de una casilla de color *b* sólo puede llegar a una de color *c* y que la ficha de una casilla de color *c* sólo puede llegar a una de color *a*. Por esta razón podemos asegurar que para que en un tablero rectangular pueda ser recorrido por una de las referidas fichas pasando por todas las casillas, sin repetir la visita y culminar en la misma casilla inicial. Tiene que poseer al menos luego de la coloración la misma cantidad de casillas de color a, b y c. Lo cual conlleva a la condición necesaria de que la cantidad de casillas del tablero sea divisible por 3.

Figura 9

Figura 10



a	b	c	a
c	a	b	c
b	c	a	b
a	b	c	a



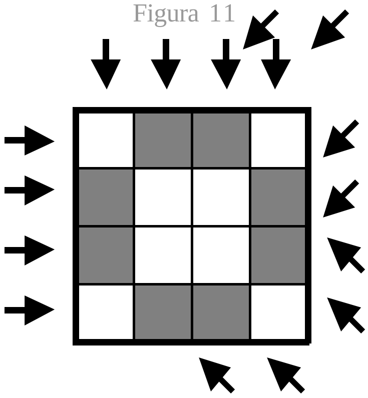
a	b	c	d	a
c	d	a	b	c
a	b	c	d	a
c	d	a	b	c
a	b	c	d	a

Si las tres direcciones en que se mueve la ficha son las mostradas en la figura 10, la coloración a utilizar puede ser la mostrada en la misma figura 10, o sea de cuatro colores *a, b, c* y *d* por filas coloreando cíclicamente manteniendo el mismo orden y por columnas de forma cíclica, omitiendo uno de los colores y manteniendo el orden. Con esta coloración aprovechamos que la ficha de una casilla de color *a* sólo puede llegar a una de color *d*, también tenemos que la ficha de una casilla de color *d* sólo puede llegar a una de color *c*, además que la ficha de una casilla de color *c* sólo puede llegar a una de color *b* y que la ficha de una casilla de color *b* sólo puede llegar a una de color *a*. Por esta razón podemos asegurar que para que en un tablero rectangular pueda ser recorrido por una de las fichas pasando por todas las casillas, sin repetir visitas y culminando en la casilla inicial. Tiene que poseer al menos, luego de la coloración la misma cantidad de casillas de color a, b, c y d. Por lo cual la cantidad de casillas del tablero tiene que ser múltiplo de 4.

Problema final (elaborado por Leonel)
En un tablero de nxn casillas, con n mayor que cinco todas las casillas son blancas excepto una negra. En el tablero se pueden realizar operaciones de cambio de coloración en todas las casillas de una misma fila, de una misma columna o una misma diagonal con la intensión de que todas lleguen a ser del mismo color. Determine las posibles posiciones de la casilla negra de modo que en un momento determinado puedan todas las casillas llegar a ser del mismo color.

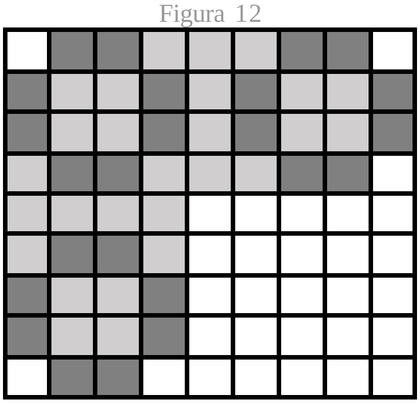
Solución:
Analicemos lo que sucede en un tablero de 4x4.
En un tablero de 4x4 notemos que la casilla negra no puede ser una de las casillas grises de la figura 11. Pues si inicialmente una de ellas es negra entonces luego de cualquier cantidad de operaciones la cantidad de casillas negras entre ellas es impar, lo cual conlleva a que nunca lleguen a ser todas del mismo color. Esto se debe a que por la distribución de las 8 casillas coloreadas, al realizar cualquier operación que cambie la coloración de una de ellas realmente cambia a exactamente dos de ellas (figura 11) y por tanto la cantidad de casillas negras entre ellas siempre sería impar.

Figura 11



Esto es para un tablero de 4x4, pero esta coloración se puede hacer en cada sub-tablero de 4x4, o sea trasladamos vertical y horizontal esta coloración como se muestra en figura 12 y llegaremos a que en los tableros de nxn con $n > 5$, las posibles posiciones de la casilla negra nos queda sólo en las esquinas del tablero y con una sola operación le cambiamos en color y todas las casillas del tablero pasarían a ser blancas.

Figura 12



La restricción de que n sea mayor que 5 fue buscando uniformidad en la solución, así que de este modo queda propuesto para el lector el ejercicio para los tableros de nxn con n menor o igual que cinco.

Estas mismas conclusiones obtenidas con ayuda de las coloraciones en los tableros son alcanzadas con razonamientos lógicos equivalentes a diferenciar los elementos de trabajo. Por ejemplo cuando tenemos una coloración de dos colores es como establecer dos estados diferentes (dividir los casos en dos) no tienen que ser colores por comodidad o para una mejor compresión empleamos los colores pero pueden ser 0 y 1 apoyados incluso en operaciones del algebra de Bolee o en la congruencia módulo 2.

Estaría interesado en que alguno de ustedes, los lectores, me haga llegar vía correo electrónico problemas y/o soluciones donde se pueda emplear este tipo de estrategia. Mi correo electrónico es waltercarb@yahoo.es.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI