

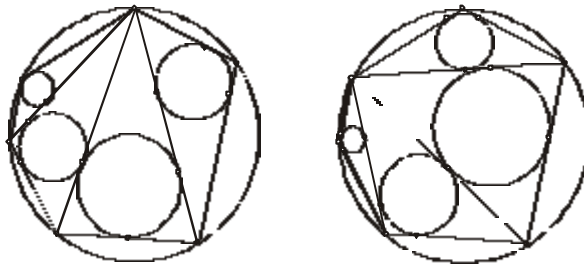
Uma soma incrivelmente invariante

Carlos A. Gomes
Natal/RN, UFRN

Um resultado altamente inesperado é encontrado no maravilhoso texto "Advanced Euclidean Geometry" de Roger Johnson's publicado pela Dover publications em 1960. É um antigo teorema japonês que pelo seu surpreendente conteúdo merece ser "ressuscitado" agora na língua portuguesa para que ele seja conhecido e apreciado com muito louvor pelos amantes da harmonia da matemática e em especial pelos geômetras.

Seja um polígono convexo, que possa ser inscrito numa circunferência. Se triangularizarmos esse polígono a partir de um de seus vértices (traçando diagonais, é claro!) e inscrevermos em cada um destes triângulos uma circunferência a soma das medidas dos raios dessas circunferências permanece constante independente da triangularização realizada com o polígono.

Veja um exemplo ilustrativo com um hexágono:



Nas duas figuras acima a soma das medidas dos raios das circunferências inscritas nos triângulos é a mesma. (apesar das medidas dos raios serem diferentes)

Para verificarmos o que foi dito acima usaremos o

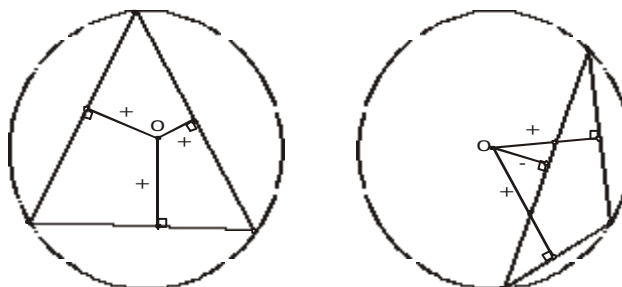
TEOREMA DE CARNOT: Num triângulo ABC a soma (algébrica) das distâncias do circuncentro do triângulo ABC aos lados AB , AC e BC desse triângulo é igual a $R+r$, onde R é a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC e r a medida do raio da circunferência inscrita no triângulo ABC .

* A convenção de sinais será:

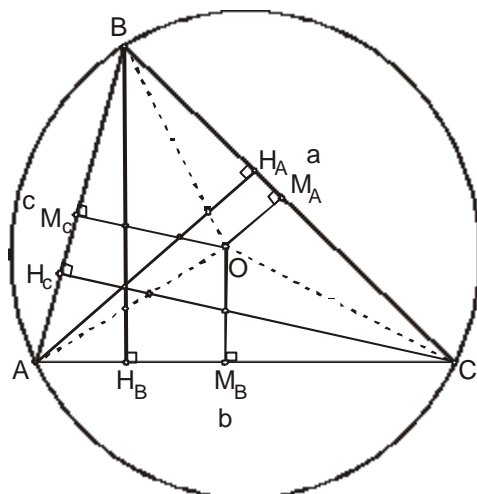
+ → Quando pelo menos uma parte do segmento está no interior do triângulo.

- → Quando o segmento está completamente fora do triângulo.

Observe as figuras:



Vamos considerar aqui o caso do triângulo acutângulo. Os outros dois casos podem ser verificados de modo razoavelmente semelhantes.



Na figura acima, temos que:

$$2 \cdot (ABC) = (a + b + c) \cdot r, \quad () = \text{Área}$$

$$2(ABC) = a\overline{OM_A} + b\overline{OM_B} + c\overline{OM_C} \text{ e daí}$$

$$r(a + b + c) = a\overline{OM_A} + b\overline{OM_B} + c\overline{OM_C} \quad (0)$$

Agora perceba que:

$\angle AOB = 2\angle C$; $\angle BOC = 2\angle A$; $\angle AOC = 2\angle B$ (Pelo teorema do ângulo inscrito). Assim podemos observar as seguintes semelhanças:

$$\Delta ABH_B \sim \Delta ACH_C \sim \Delta BOM_A \rightarrow \frac{\overline{AB_B}}{c} = \frac{\overline{AH_C}}{b} = \frac{\overline{OM_A}}{R} \quad (1)$$

$$\Delta BAH_A \sim \Delta BCH_C \sim \Delta COM_B \rightarrow \frac{\overline{BH_A}}{c} = \frac{\overline{BH_C}}{a} = \frac{\overline{OM_B}}{R} \quad (2)$$

$$\Delta CBH_B \sim \Delta CAH_A \sim \Delta AOM_C \rightarrow \frac{\overline{CH_B}}{a} = \frac{\overline{CH_A}}{b} = \frac{\overline{OM_C}}{R} \quad (3)$$

e daí de (1), (2) e (3) temos que

$$\frac{\overline{AB_B}}{c} = \frac{\overline{AH_C}}{b} = \frac{\overline{OM_A}}{R} \rightarrow \frac{\overline{AH_b} + \overline{AH_c}}{c+b} = \frac{\overline{OM_A}}{R} \rightarrow R(\overline{AH_b} + \overline{AH_c}) = (b+c) \cdot \overline{OM_A} \quad (4)$$

$$\frac{\overline{BH_A}}{c} = \frac{\overline{BH_C}}{a} = \frac{\overline{OM_B}}{R} \rightarrow \frac{\overline{BH_a} + \overline{BH_c}}{c+a} = \frac{\overline{OM_B}}{R} \rightarrow R(\overline{BH_a} + \overline{BH_c}) = (c+a) \cdot \overline{OM_B} \quad (5)$$

$$\frac{\overline{CH_B}}{a} = \frac{\overline{CH_A}}{b} = \frac{\overline{OM_C}}{R} \rightarrow \frac{\overline{CH_b} + \overline{CH_a}}{a+b} = \frac{\overline{OM_C}}{R} \rightarrow R(\overline{CH_b} + \overline{CH_a}) = (a+b) \cdot \overline{OM_C} \quad (6)$$

Adicionando (4), (5) e (6) temos:

$$\overline{OM}_a(b+c) + \overline{OM}_b(a+c) + \overline{OM}_c(a+b) = R(a+b+c) \quad (7)$$

finalmente fazendo (7) + (0) temos:

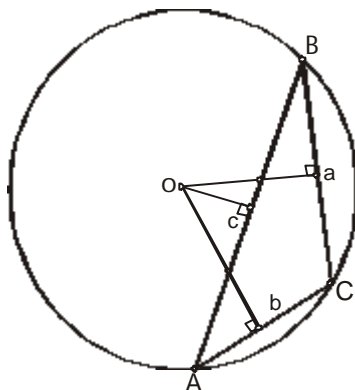
$$\overline{OM}_a(b+c) + \overline{OM}_b(a+c) + \overline{OM}_c(a+b) = R(a+b+c)$$

$$+ \underline{a \cdot OM_a + b \cdot OM_b + c \cdot OM_c = r(a+b+c)}$$

$$(\overline{OM}_a + \overline{OM}_b + \overline{OM}_c)(a+b+c) = (R+r)(a+b+c)$$

e finalmente, $\overline{OM}_a + \overline{OM}_b + \overline{OM}_c = R+r$.

Obs. Na convenção estabelecida para os sinais da medida algébrica dos segmentos o sinal (-) é justificável para garantir a igualdade que relaciona as medidas das áreas conforme ilustramos abaixo:



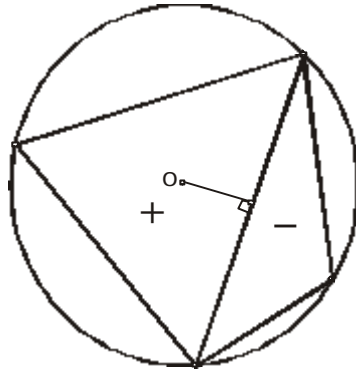
$$(ABC) = (OAC) + (OCB) - (OAB) \text{ e daí,}$$

$$r(a+b+c) = a\overline{OM}_a + b\overline{OM}_b - c\overline{OM}_c$$

Bem, de posse do teorema de Carnot vamos agora provar a nossa jóia rara! Vejamos: Primeiro perceba que qualquer triangularização de n-ágono com diagonais desse polígono gera n-2 triângulos. Vamos assumir que os triângulos são numerados de 1 a (n - 2). Seja r_i a medida do raio da circunferência inscrita no i-ésimo triângulo e para cada triângulo seja $OO_i = a_i\overline{OM}_{ai} + b_i\overline{OM}_{bi} + c_i\overline{OM}_{ci}$ e daí pelo teorema de Carnot temos que $r_i + R = \overline{OM}_{ci}$. Calculando a soma desse resultado aplicado a cada triângulo temos:

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{n-2} = \overline{OO}_1 + \overline{OO}_2 + \dots + \overline{OO}_{n-2} - (n-2) \cdot R$$

Perceba que a soma $\overline{OO}_1 + \overline{OO}_2 + \dots + \overline{OO}_n$ consiste na soma algébrica das perpendiculares traçadas aos lados do n-ágono são contadas apenas uma vez (e com sinal positivo) já as perpendiculares às diagonais são contadas duas vezes (uma com sinal positivo e outra com sinal negativo) conforme ilustra a figura abaixo:



Assim a soma $\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \dots + \overline{OO_{n-2}}$ corresponde a soma das distâncias de O aos lados do polígono (que é constante) e daí concluímos que $r_1 + r_2 + \dots + r_{n-2}$ é constante pois $r_1 + r_2 + \dots + r_{n-2} = \overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \dots + \overline{OO_{n-2}} + (n-2) \cdot R = \text{constante}$.

Referências:

- [1] Mathematical gems III , Ross Honsberger, MAA
- [2] www.cut-the-knot.org/proofs/jap.shtml

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

