PROBLEMAS CUADRÁTICOS DE OLIMPIADAS
Francisco Bellot Rosado

Presentamos a continuación una serie de problemas de Olimpiadas con la característica común de hacer intervenir en ellos, en mayor o menor medida, las propiedades del trinomio de segundo grado. Aunque a primera vista podría parecer que debería tratarse de problemas o ejercicios muy sencillos (todo el mundo cree saber resolver una ecuación de segundo grado), el examen de los ejemplos que presentamos quizá haga variar semejante opinión.

Recordamos las relaciones de Cardano-Vieta para el polinomio de segundo grado :

Si α, β son las raíces (reales o complejas) del polinomio $x^2 + px + q$, la identificación de coeficientes en los dos miembros de

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + px + q$$

proporciona las igualdades

$$\begin{aligned} -(\alpha + \beta) &= p \\ \alpha\beta &= q. \end{aligned}$$

El método de completamiento de cuadrado aplicado al polinomio

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

permite escribirlo en la forma

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

de donde se deduce la conocida fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ es el discriminante, porque separa las raíces : Si $\Delta > 0$, $P(x)$ tiene dos raíces reales, si $\Delta = 0$ tiene una raíz real doble; si $\Delta < 0$, no tiene raíces reales.

Problema 1

Si $P(x) = x^2 + ax + b, Q(x) = x^2 + px + q$, hallar la condición para que los dos polinomios tengan una raíz común.

Solución

Si x_1, x_2 son las raíces (reales o complejas) de P, sustituyéndolas en Q y calculando $Q(x_1) \cdot Q(x_2)$, obtenemos

$$Q(x_1) \cdot Q(x_2) = x_1^2 x_2^2 + q\left(x_1^2 + x_2^2\right) + p x_1 x_2 (x_1 + x_2) + p^2 x_1 x_2 + pq (x_1 + x_2) + q^2$$

De las relaciones de Cardano-Vieta para P resulta que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -a \\ x_1 x_2 &= b \\ x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2b \end{aligned}$$

así que sustituyendo en la expresión anterior resultará

$$Q(x_1) \cdot Q(x_2) = (q-b)^2 + (p-a)(bp - aq),$$

y como, evidentemente, la condición para que una de las raíces de P sea también raíz de Q es $Q(x_1) \cdot Q(x_2) = 0$, resulta la condición necesaria y suficiente buscada escrita como

$$(q-b)^2 + (p-a)(bp - aq) = 0.$$

Problema 2

Sea $f(x) = a^2 x^2 - \left(b^2 - 2ac\right) x + c^2$, con $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$. Probar que si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = 0$, entonces n es cuadrado perfecto.

(Cr.Mortici, *Gazeta Matematică 1987, Rumania)*

Solución

Las raíces de la ecuación son

$$\frac{b^2 - 2ac \pm b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a^2};$$

para que alguna de ellas sea entera, debe existir k entero tal que $b^2 - 4ac = k^2$. Entonces se tiene

$$b^2 - k^2 = 4ac, \quad \frac{b^2 - k^2}{2} = 2ac$$

así que sustituyendo en la expresión para las raíces de la ecuación se obtiene

$$\frac{b^2 - \frac{b^2 - k^2}{2} \pm bk}{2a^2} = \frac{b^2 + k^2 \pm 2bk}{4a^2} = \left(\frac{b \pm k}{2a}\right)^2, \text{ que es un cuadrado.}$$

Problema 3

Sea a un número real dado. Calcular los números reales $x_1, \cdots, x_n$ que son soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{c} x_1^2 + a x_1 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_2 \\ x_2^2 + a x_2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_3 \\ \cdots \\ x_{n-1}^2 + a x_{n-1} + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_n \\ x_n^2 + a x_n + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_1 \end{array}\right\}$$

(Torneo de las Ciudades)

Solución

Sumando miembro a miembro todas las ecuaciones :

$$\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)+(a-1)\left(x_1+\cdots+x_n\right)+n\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=0$$

y el primer miembro se escribe como

$$x_1^2+(a-1)\,x_1+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+\cdots+x_n^2+(a-1)\,x_n+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=0,$$

es decir

$$\left(x_1+\frac{a-1}{2}\right)^2+\cdots+\left(x_n+\frac{a-1}{2}\right)^2=0,$$

luego todos los paréntesis deben ser nulos y así se obtiene

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1-a}{2}.$$

Inmediatamente se comprueba por sustitución directa que esta solución verifica las ecuaciones iniciales del sistema.

Problema 4

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales tal que $f(x)\geq 0$ para todo x real. Demostrar que $f\left(x\right)$ puede escribirse en la forma

$$f(x)=\left(g_1\left(x\right)\right)^2+\left(g_2\left(x\right)\right)^2+\cdots+\left(g_n\left(x\right)\right)^2,$$

donde los g_i son polinomios con coeficientes reales.

(*Propuesto por Hungría, no usado, IMO 1973)*

Solución *(de Mª Ascensión López Chamorro)*

f tiene que ser de grado par y tendrá un mínimo absoluto mayor o igual que 0; además el coeficiente principal y el término independiente son positivos.

Si f es de segundo grado,

$$f(x)=ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\left(\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}\right)^2$$

y esa descomposición responde a las condiciones del problema (en este caso, g_2 es un polinomio constante).

Procedemos a continuación por inducción sobre el grado del polinomio f :supongamos la proposición cierta para cualquier polinomio de grado $2\left(n-1\right)$; sea $gr(f)=2n$ y $\beta=f(\alpha)\geq 0$ el mínimo del polinomio f. Entonces

$$f(x)-\beta=(x-\alpha)^2\,f_{2(n-1)}\left(x\right)=(x-\alpha)^2\sum_{h=1}^{k}\left(g_h\left(x\right)\right)^2$$

así que en este caso se tiene

$$f(x) = \sum_{h=1}^{k} ((x-\alpha)^2 g_h(x))^2 + \left(\sqrt{\beta}\right)^2$$

y hemos terminado la fase inductiva, lo que prueba la proposición.

Problema 5

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Resolver (¡numéricamente!) la ecuación

$$(ax-b)^2 + (bx-a)^2 = x,$$

sabiendo que admite una raíz entera.

(M. Becheanu, *Gazeta Matematică, Rumania)*

Comentario

Este es, en mi opinión, "el más bello problema sobre la ecuación de segundo grado jamás propuesto"; la solución es del proponente del problema, Mircea Becheanu, Jefe de la Delegación Rumana en la IMO.

Solución

Si $a = b = 0$, la ecuación es de primer grado, con solución única $x = 0$.

Supongamos $a \neq 0$ ó $b \neq 0$. La ecuación es

$$\left(a^2+b^2\right)x^2 - (4ab+1)x + a^2 + b^2 = 0,$$

de segundo grado, con raíces x_1, x_2 , siendo $x_1 \in \mathbb{Z}$. Como

$$x_1 = (ax_1 - b)^2 + (bx_1 - a)^2,$$

deducimos que x_1 es, además de entero, positivo. Como las raíces son reales, el discriminante de la ecuación será mayor o igual que cero:

$$(4ab+1)^2 - 4\left(a^2+b^2\right)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow \left[1-2(a-b)^2\right]\left[1+2(a-b)^2\right] \geq 0$$

y esto exige que $1 - 2(a-b)^2 \geq 0$. Puesto que $(a-b)^2$ es natural, resulta necesariamente $(a-b)^2 = 0$, es decir, $a = b$.

Con esto, la ecuación se convierte en

$$2a^2 - \left(4a^2+1\right)x + 2a^2 = 0 \qquad (**)$$

y, según las fórmulas de Cardano-Vieta, se tiene

$$x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2}, \qquad x_1 x_2 = 1.$$

Observamos que, al ser $x_1 \in \mathbb{N}$, $x_1 = 0$ no puede ser raíz de (**), ni tampoco $x_1 = 1$ puede serlo. Por lo tanto, $x_1 \geq 2$. Ya que $x_2 = \frac{1}{x_1} > 0$, entonces $x_1 < x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2} < 3$. Por lo tanto $2 \leq x_1 < 3$ con x_1 entero implica $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$. Sustituyendo los valores resulta $a^2 = 1$, así que $a \in \{-1, 1\}$.

La única posibilidad, entonces, es $a = b = \pm 1$, con raíces $2, \frac{1}{2}$.

Problema 6

Hallar una condición necesaria y suficiente para que la ecuación $ax^2+bx+c=0, a \neq 0$, tenga una de sus raíces igual al cuadrado de la otra.

(*Crux Mathematicorum 1973, Canadá)*

Solución

Sean r y r^2 las raíces; entonces

$$r^2+r=-\frac{b}{a}, \quad r^3=\frac{c}{a}.$$

Puesto que se verifica

$$\left(r^2+r\right)^3=r^3\left(r+1\right)^3=r^3\left(r^3+3\left(r^2+r\right)+1\right)$$

se tiene la condición necesaria

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^3=\frac{c}{a}\left(\frac{c}{a}-3\frac{b}{a}+1\right) \Longleftrightarrow b^3+ca\left(c+a\right)=3abc \qquad (*).$$

Esta condición es suficiente, porque si (*) se cumple, y llamamos R, r a las raíces, sustituyendo $-\frac{b}{a}=R+r, \frac{c}{a}=Rr$, en la primera de las dos expresiones (*) se obtiene

$$\left(R+r\right)^3=Rr\left[Rr+3\left(R+r\right)+1\right] \Longleftrightarrow \left(R^2-r\right)\left(R-r^2\right)=0,$$

lo que prueba que una de las raíces es el cuadrado de la otra.

Problema 7

Resolver la ecuación

$$\left[\frac{2x^2}{x^2+1}\right]=x,$$

siendo [] la parte entera.

(Gazeta Matematică, Rumania, 1990)

Solución

Como $\frac{2x^2}{x^2+1} \geq 0$, $\left[\frac{2x^2}{x^2+1}\right]$ es natural, luego x es natural.

Aplicamos la desigualdad de las medias armónica y geométrica a los números positivos 1 y x^2 : se tendrá

$$\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} \leq \sqrt{1 \cdot x^2}=x \Longrightarrow \frac{2x^2}{x^2+1} \leq x \qquad (1).$$

Por otra parte, como

$$\left[\frac{2x^2}{x^2+1}\right] \leq \frac{2x^2}{x^2+1},$$

resulta según el enunciado

$$x \leq \frac{2x^2}{x^2+1} \qquad (2),$$

así que será

$$x = \frac{2x^2}{x^2+1},$$

de donde $x = 0$ ó $x = 1$.

Problema 8

Sean $a, b \in \mathbb{N}^*$ y la ecuación $(x-a)^2 + (x-b)^2 = 2ab - 1$.

Demostrar que :

i) la ecuación no tiene raíces racionales.

ii) Si $b = a+1$, entonces la ecuación tiene raíces reales, y en este caso hallar la parte entera de las raíces de la ecuación.

(*Gazeta Matematică, Rumania)*

Solución

i)La ecuación se puede escribir como

$$2x^2 - 2(a+b)x + (a-b)^2 + 1 = 0.$$

La siguientes condiciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \quad &\in \quad \mathbb{Q} \Longleftrightarrow \gneqq =4\left[(a+b)^2 - 2(a-b)^2 - 2\right] = k^2, k \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \quad (a+b)^2 - 2(a-b)^2 - 2 = l^2, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sean $p = a+b, q = a-b$. Como p y q son de la misma paradad, distinguiremos dos casos:

1) $p = 2u, q = 2v, \quad$ con $u, v \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$(a+b)^2 - 2(a-b)^2 - 2 = 4u^2 - 8v^2 - 2.$$

Puesto que 2 divide a $4u^2 - 8v^2 - 2$, pero 4 no, es imposible que $4u^2 - 8v^2 - 2$ sea un cuadrado perfecto.

2) $p = 2u+1, q = 2v+1$. En este caso,

$$(a+b)^2 - 2(a-b)^2 - 2 = 4u(u+1) - 8v(v+1) - 3 = 8t + 5, t \in \mathbb{Z}.$$

Como el resto de la división por 8 de un cuadrado perfecto puede ser 0,1 ó 4, tampoco en este caso Δ es un cuadrado perfecto.

Por lo tanto, las raíces de la ecuación no son racionales.

ii) Si $b = a+1$, la ecuación es $x^2 - (2a+1)x + 1 = 0$, cuyo discriminante es $4a^2 + 4a - 3$. Como $a \in \mathbb{N}^*$, $\Delta \geq 5$, así que las raíces son reales y distintas : $x_1 < x_2$. Sea la función

$$f(x) = x^2 - (2a+1)x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se tiene : $f(0) = 1 > 0$; $f(1) = 1-2a < 0$; $f(2a) = 1-2a < 0$, $f(2a+1) > 0$. Resulta así

$$0 < x_1 < 1 < 2a < x_2 < 2a + 1$$

y $[x_1] = 0, [x_2] = 2a$.

Problema 9

Demostrar que $n^4 + 4$ nunca es primo si $n > 1$ (Sophie Germain)

Generalización : $4^n + n^4$ no es primo si $n > 1$.

(Olimpiada de Brasil)

Solución

Se tiene

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = \left(n^2 + 2\right)^2 - 4n^2 = \left(n^2 + 2 - 2n\right)\left(n^2 + 2 + 2n\right)$$

Es claro que el último factor es mayor que 1. En cuanto al otro, $n^2 + 2 - 2n = (n-1)^2 + 1$ es igualmente mayor que 1 si $n \neq 1$.

Generalización :

Si n es par, es obvio que $4^n + n^4$ es par y mayor que 2, luego no es primo.

Estudiaremos el caso impar utilizando la identidad (llamada de Sophie Germain)

$$x^4 + y^4 = \left(x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy\right)\left(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy\right).$$

Entonces, si $n = 2k+1$, $4^n = 4^{2k+1} = \left(\sqrt{2}\cdot 2^k\right)^4$, así que podemos escribir

$$4^n + n^4 = \left(\sqrt{2}\cdot 2^k\right)^4 + n^4 = \left(2^n + n^2 + 2^{k+1}\cdot n\right)\left(2^n + n^2 - 2^{k+1}\cdot n\right)$$

Comprobemos finalmente que el menor de los dos factores anteriores no es igual a 1:

$2^n + n^2 - 2^{k+1}\cdot n = 2^{2k+1} + (2k+1)^2 - 2^{k+1}(2k+1) =$

$= 2\cdot 2^{2k} - 2\cdot 2^{2k}(2k+1) + (2k+1)^2 = \left[2^k - (2k+1)\right]^2 + 2^{2k} \geq 5$ pues $k > 0$.

Problema 10

Hallar los números reales positivos x, y sabiendo que las cuatro medias

$$a = \frac{x+y}{2},\ g = \sqrt{xy},\ h = \frac{2xy}{x+y},\ k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

son números naturales cuya suma vale 66.

(Olimpiada de la República Checa, 1995)

Solución

Ya que 66 no es divisible por 4, no puede ser $a = g = h = k$, en consecuencia, por la desigualdad de las medias, será

$$h < g < a < k.$$

Sea c el máximo común divisor de a y $g.Entonces$

$$a = ca_1, \quad g = cg_1 \quad \text{donde } g_1 < a_1 \ \text{ son primos entre sí.}$$

Ya que $h = \frac{g^2}{a} = \frac{cg_1^2}{a_1}$, el número c debe ser divisible por a_1, es decir

$c = da_1$ para algún número natural d. Las cuatro medias se pueden ahora expresar mediante d, a_1, g_1 :

$$h = dg_1^2, \quad g = da_1g_1, \quad a = da_1^2, \quad k = \sqrt{2a^2 - g^2} = da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}.$$

Ya que la raíz cuadrada de un número natural es natural o irracional, el número $\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}$ debe ser natural (que es además mayor que a_1, porque $g_1 < a_1$. De aquí que el tercer y cuarto sumandos de la igualdad

$$dg_1^2 + da_1g_1 + da_1^2 + da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2} = 66 \qquad (*)$$

son los dos mayores que a_1^2(ya que $d \geq 1$). De aquí se sigue que $2a_1^2 < 66$, es decir, $a_1 < 5$. Se comprueba fácilmente que de las diez raíces cuadradas

$$\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}, \qquad 1 \leq g_1 < a_1 \leq 5$$

la única que es entera es $\sqrt{2 \cdot 5^2 - 1^2}$, con $a_1 = 5, g_1 = 1$.

Sustituyendo en (*) se obtiene $d = 1$, lo que da $(h, g, a, k) = (1, 5, 25, 35)$. Los números x, y son las soluciones de la ecuación

$$t^2 - 50t + 25 = 0,$$

es decir

$$\{x, y\} = \left\{25 + 10\sqrt{6}, 25 - 10\sqrt{6}\right\}.$$

Problema 11

Sea m un número real, tal que las raíces x_1 y x_2 de la ecuación

$$f(x) = x^2 + (m-2)\,x + m^2 - 3m + 3 = 0$$

son reales.

a) Hallar todos los valores de m para los cuales $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

b) Probar que

$$1 < \frac{mx_1^2}{1 - x_1} + \frac{mx_2^2}{1 - x_2} + 8 \leq \frac{121}{9}$$

(*Olimpiada de Bulgaria, 1995)*

Solución

a) Ya que la ecuación tiene dos raíces reales, su discriminante

$$(m-2)^2 - 4\left(m^2 - 3m + 3\right) = -3m^2 + 4m + 4 \geq 0,$$

luego $-\frac{2}{3} \leq m \leq 2$.
Por otra parte,

$$6 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = -m^2 - 2m + 10.$$

De aquí se obtiene $m = -1 \pm \sqrt{5}$, pero

$$-1 - \sqrt{5} < -\frac{2}{3} < -1 + \sqrt{5} < 2,$$

y por lo tanto sólo $m = -1 + \sqrt{5}$ es solución del problema.
b) Se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{mx_1^2}{1 - x_1} + \frac{mx_2^2}{1 - x_2} &= \frac{m\left[x_1^2(1 - x_2) + x_2^2(1 - x_1)\right]}{f(1)} \\
&= \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2(x_1 + x_2)}{m - 2} \\
&= \frac{m^3 - 8m^2 + 13m - 2}{m - 2} \\
&= m^2 - 6m + 1.
\end{aligned}$$

Entonces, si llamamos

$$F = \frac{mx_1^2}{1 - x_1} + \frac{mx_2^2}{1 - x_2} + 8,$$

resulta $F = (m - 3)^2$, y entonces

$$\frac{121}{9} = \left(-\frac{2}{3} - 3\right)^2 \geq F > (2 - 3)^2 = 1.$$

Problema 12

Se considera la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 4px - p + 1$. Sea S el área del triángulo del que dos vértices son los puntos de intersección de $f(x)$ con el eje de abscisas,mientras que el tercer vértice es el vértice de la parábola. Hallar todos los racionales p tales que S es entero.

(*Olimpiada de Bulgaria 1995)*

Solución

El discriminante de $f(x)$ es $D = 4\left(4p^2 - p + 1\right) > 0$ para todo p real. En consecuencia $f(x)$ tiene dos raíces reales x_1 y x_2, y la parábola corta al eje x en dos puntos distintos, A y B. El vértice C de la parábola tiene coordenadas $2p$ y $h = f(2p) = 4p^2 - p + 1 > 0$. Se tiene

$$AB = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 2\sqrt{4p^2 - p + 1}$$

Ahora calculamos

$$S = S_{ABC} = \frac{AB \cdot h}{2} = \left(4p^2 - p + 1\right)^{3/2}.$$

Llamemos $q = 4p^2 - p + 1$. Ya que q es racional, y $q^3 = S^2$ es entero, entonces q es entero también.Entonces $\frac{S}{q}$ es racional, y como su cuadrado $\left(\frac{S}{q}\right)^2 = q$ es entero, entonces $\frac{S}{q}$ es igualmente entero. Por lo tanto $q = n^2$, siendo n un entero positivo :

$$4p^2 - p + 1 - n^2 = 0.$$

Esta ecuación cuadrática (respecto de p) tiene una raíz racional exactamente cuando su discriminante $16n^2 - 15$ es el cuadrado de un número racional. Por lo tanto $16n^2 - 15 = m^2$, y no hay pérdida de la generalidad en suponer m entero positivo. De la igualdad

$$(4n - m)(4n + m) = 15$$

obtenemos

$$\left.\begin{array}{r} 4n - m = 1 \\ 4n + m = 15 \end{array}\right\} \text{ o bien } \left.\begin{array}{r} 4n - m = 3 \\ 4n + m = 5 \end{array}\right\}$$

De aquí que $n = 2, m = 7$ o bien $n = 1, m = 1$.

Los números racionales que estamos buscando son $0, 1, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}$.

Problema 13

¿Para qué funciones cuadráticas $f(x)$existe una función cuadrática $g(x)$ tal que las raíces de la ecuación $g(f(x)) = 0$ son cuatro términos consecutivos (distintos) de una progresión aritmética y al mismo tiempo son también raíces de la ecuación $f(x) \cdot g(x) = 0$?

(Olimpiada de Chequia 2000)

Solución

Se sigue de las hipótesis que cada una de las ecuaciones $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ tiene dos raíces reales, y esas 4 raíces son distintas. Llamemos x_1 y x_2 a las raíces de $f(x) = 0$. Entonces $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde a es un número real, $a \neq 0$. Por hipótesis, x_1 es también raíz de $g(f(x))$, luego $g(f(x_1)) = g(0) = 0$. Por lo tanto, $g(x) = 0$ admite la raíz 0; sea b la otra raíz de esta ecuación : se tendrá $g(x) = cx(x - b), c \neq 0$.

Los números 0 y b son también raíces de $g(f(x)) = 0$:

$$\begin{aligned} g(f(0)) &= cf(0)(f(0) - b) = 0, \\ g(f(b)) &= cf(b)(f(b) - b) = 0. \end{aligned}$$

Como los números 0 y b no pueden ser raíces de f, se sigue de ello que $f(0) = f(b) = b$.

Así, sobre el eje real, los dos puntos 0 y b, así como los puntos x_1 y x_2 son simétricos con respecto a la primera coordenada del vértice de la parábola

$y = f(x)$. Los números $0, b, x_1$ y x_2 (que forman una progresión aritmética por hipótesis) pueden ser ordenados de dos maneras:

· Los números x_1 y x_2 son interiores al intervalo $[0, b]$. Entonces, (con una elección apropiada de los subíndices), $x_1 = b/3, x_2 = 2b/3$, luego

$$b = f(0) = a\left(-\frac{b}{3}\right)\left(-\frac{2b}{3}\right) = \frac{2ab^2}{9} \Longrightarrow b = \frac{9}{2a}$$

y

$$f(x) = a\left(x - \frac{3}{2a}\right)\left(x - \frac{3}{a}\right) = ax^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2a}.$$

· Los números 0 y b son interiores al intervalo $[x_1, x_2]$. Entonces (eligiendo apropiadamente los subíndices), $x_1 = -b, x_2 = 2b$, de donde

$$b = f(0) = ab\,(-2b) = -2ab^2 \Longrightarrow b = -\frac{1}{2a}$$

y

$$f(x) = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)\left(x + \frac{1}{a}\right) = ax^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2a}.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI