TRIÁNGULOS ARMÓNICOS

K.R.S.SASTRY, Bangalore, India

Es bien conocido que tres números e, f, g están en progresión aritmética (AP) si $f - e = g - f$. Además, $f = \frac{e+g}{2}$ es la media aritmética de los números e, g.

Algunos triángulos pueden tener las longitudes de los lados en progresión aritmética. Tales triángulos se llaman *triángulos de Hoppe* $[1, 2]$. Ejemplos de estos triángulos son los de lados $(3, 5, 7)$, $(3, 4, 5)$ o $(13, 14, 15)$. El segundo ejemplo es un triángulo rectángulo, llamado *pitagórico,* como es bien conocido. Además, el segundo y el tercer ejemplo tienen área entera, que se puede comprobar por medio de la fórmula de Herón. Esos triángulos se llaman *heronianos.*

Tres números (l, m, n) están en progresión geométrica(GP) si $\frac{m}{l} = \frac{n}{m}$, y $m = \sqrt{\ln}$ es la media geométrica de l y n. Algunos triángulos pueden tener las longitudes de sus lados en GP; tales triángulos se llaman *auto-alturas (self-altitude)*$[3, 4]$. Un ejemplo de tales triángulos es $(4, 6, 9)$.

Tres números (x, y, z) están en progresión armónica (HP) si sus inversos están en PA, es decir, $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}$, y entonces $y = \frac{2xz}{x+z}$ es la media armónica de x, z.

Es posible que las longitudes de los lados de un triángulo sean números naturales en HP. Por ejemplo, $(15, 12, 10)$. Por lo que el autor conoce, estos triángulos no han sido estudiados hasta ahora. Nuestro propósito es estudiar triángulos con lados en HP, que llamaremos *triángulos armónicos.* El primer y segundo teoremas que probaremos más adelante son válidos para triángulos armónicos con números reales positivos como longitudes de los lados, mientras que el tercero es aplicable sólo a triángulos cuyas longitudes de los lados son números naturales.

Representaciones paramétricas de triángulos armónicos

Es relativamente sencillo deducir expresiones paramétricas que generen el conjunto de los triángulos armónicos. Demostraremos esto en el Teorema 1. Utilizaremos la notación habitual de a, b, c para las longitudes de los lados BC,CA y AB, respectivamente, y Δ para el área del triángulo.

Teorema 1.*El triángulo ABC es armónico si y sólo si sus lados son de la forma*

$$(a, b, c) = (u(u+v), 2uv, v(u+v)),$$

donde u, v son números reales positivos tales que

$$\left(\sqrt{2}-1\right) v < u < \left(\sqrt{2}+1\right) v.$$

Demostración

Sin pérdida de generalidad se puede suponer los lados en orden a, b, c.

Entonces el triángulo será armónico si y solo si a, b, c están en progresión armónica, es decir

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{a}.$$

Despejando de aquí b en función de a y c se obtiene

$$b=\frac{2ac}{a+c} \qquad (1).$$

Luego ABC será armónico si y sólo si sus lados son

$$a,\frac{2ac}{a+c},c.$$

Para evitar la fracción, multiplicamos los tres términos por $a+c$ y obtenemos así un triángulo semejante al anterior. Para obtener expresiones paramétricas para los lados, y generar así un conjunto infinito de triángulos armónicos, reemplazamos a por u y c por v,siendo estos u, v números reales positivos, lo que daría

$$(a,b,c)=(u\,(u+v)\,,2uv,v\,(u+v))\,. \qquad (2)$$

Pero (2) por sí solo no garantiza que así se obtengan triángulos armónicos cualesquiera que sean u y v. Por ejemplo, si $u=5, v=2$ da $(a,b,c)=(35,20,14)$ que no son los lados de un triángulo porque $b+c=34<35=c$.

Considerando las desigualdades triangulares $a+b>c, b+c>a, c+a>b$ obtenemos sucesivamente:

i) $a+b>c \Longleftrightarrow u\,(u+v)+2uv>v\,(u+v) \Longleftrightarrow u^2+2uv-v^2>0 \Longleftrightarrow (u+v)^2>2v^2$, es decir

$$u>\left(\sqrt{2}-1\right)v.$$

ii) $b+c>a \Longleftrightarrow 2uv+v\,(u+v)>u\,(u+v) \Longleftrightarrow u^2-2uv-v^2<0 \Longleftrightarrow (u-v)^2<2v^2$, es decir

$$u<\left(\sqrt{2}+1\right)v.$$

iii) $c+a>b \Longleftrightarrow v\,(u+v)+u\,(u+v)>2uv$, que siempre es cierto.

Combinando entonces i) y ii) tenemos las condiciones del teorema 1.

Un ejemplo numérico.

Supongamos que $v=4$. Entonces debemos encontrar un número real u tal que

$$\left(\sqrt{2}-1\right)4<u<\left(\sqrt{2}+1\right)4.$$

Puesto que hay infinitos números reales entre estas dos cotas, habrá infinidad de triángulos armónicos generados por un valor dado de v. Si elegimos el valor $u=3$ entonces obtenemos el triángulo armónico

$$(a,b,c)=(21,24,28)\,.$$

Para ese mismo v podríamos usar $u = \sqrt{11}$, obteniendo ahora

$$(a, b, c) = (11 + 4\sqrt{11}, 8\sqrt{11}, 4\left(4 + \sqrt{11}\right)).$$

Ahora deduciremos el corolario 1, que da la caracterización de los triángulos armónicos en función de las alturas. (Es claro que el teorema 1 la daba en función de los lados).

Corolario 1: *El triángulo ABC es armónico si y sólo si sus alturas h_a, h_b, h_c están en progresión aritmética.*

Demostración

Es una consecuencia inmediata de las fórmulas

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c, \text{ es decir} \\ h_a &= \frac{2\Delta}{a}, h_b = \frac{2\Delta}{b}, h_c = \frac{2\Delta}{c}. \end{aligned}$$

En efecto,

$$ABC \text{ armónico } \Longleftrightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \text{ en AP} \Longleftrightarrow \frac{2\Delta}{a}, \frac{2\Delta}{b}, \frac{2\Delta}{c} \text{ en AP.}\blacksquare$$

En el teorema siguiente consideraremos otra caracterización. Recordemos el teorema de la bisectriz: *Cada bisectriz del triángulo ABC divide al lado opuesto en segmentos que son proporcionales a los lados contiguos.*

Teorema 2. *Sean AD, BE, CF las bisectrices interiores del triángulo ABC. Entonces ABC es armónico si y sólo si*

$$\frac{AF}{FB} + \frac{CD}{DB} = 2.$$

Demostración.

De acuerdo con el teorema de la bisectriz,

$$\frac{AF}{FB} = \frac{b}{a}, \frac{CD}{DB} = \frac{b}{c}.$$

Por lo tanto, $\frac{AF}{FB} + \frac{CD}{DB} = 2$ si y sólo si

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{c} = 2 \Longleftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b} \Longleftrightarrow ABC \text{ es armónico.}\blacksquare$$

Al final proponemos al lector otra caracterización de los triángulos armónicos en términos de las áreas de los triángulos BIC,CIA,AIB, siendo I el incentro de ABC.

En lo que sigue, requeriremos que u y v sean números naturales.

Triángulos armónicos cuyos lados son números naturales

Si restringimos los parámetros u, v de los Teoremas 1 y 2 a tomar valores naturales, obtendremos triángulos armónicos cuyos lados son números naturales. Por ejemplo, si $u = 2, v = 1$, puesto que $\left(\sqrt{2}-1\right)1 < 2 < \left(\sqrt{2}+1\right)1$, las expresiones paramétricas $a = u\left(u+v\right), b = 2uv, c = v\left(u+v\right)$ conducen al triángulo armónico $(a, b, c) = (6, 4, 3)$.

Los triángulos armónicos con lados naturales tienen una propiedad intrínseca interesante, que veremos en el Teorema 3. En el ejemplo citado, será útil observar dos cosas: i) $mcd\left(6, 4, 3\right) = 1$, es decir, ABC es un triángulo armónico *primitivo.*

ii) $a + c = 6 + 3 = 9$, que es un cuadrado impar.

Para comprender bien el argumento que se utiliza en la demostración del teorema 3, invitamos al lector a demostrar las siguientes desigualdades:

1) *Sea w un número natural. Entonces se tiene*

$$\left(\sqrt{2}-1\right)w < w+1 < \left(\sqrt{2}+1\right)w \qquad (3).$$

2) *Sea w un número natural impar mayor que 3. Entonces*

$$\left(\sqrt{2}-1\right)(w-2) < w+2 < \left(\sqrt{2}+1\right)(w-2) \qquad (4).$$

3) *Sea $w$un número par mayor que 2. Entonces*

$$\left(\sqrt{2}-1\right)(w-1) < w+1 < \left(\sqrt{2}+1\right)(w-1) \qquad (5).$$

Teorema 3. *Un triángulo ABC es armónico primitivo si y sólo si la suma de sus lados AB y BC es, o bien un cuadrado impar mayor que uno, o bien el doble de un cuadrado.*

Demostración.

Del teorema 1 tenemos

$$a = u\left(u+v\right), b = 2uv, c = v\left(u+v\right),$$

donde u y v son primos entre sí, tales que

$$\left(\sqrt{2}-1\right)v < u < \left(\sqrt{2}+1\right)v.$$

Hay dos casos a considerar:

<u>Caso 1:</u>

u y v tienen distinta paridad, es decir, uno de ellos es par y el otro impar. En este caso $u + v$ es impar. Ahora bien, $b = 2uv$ es siempre par, pero uno de los otros lados, a o c, será par y el otro impar, dependiendo de que u o v sea par. Entonces $mcd\left(a, b, c\right) = 1$ y el triángulo ABC será primitivo. En este caso se tiene $a + c = u\left(u+v\right) + v\left(u+v\right) = \left(u+v\right)^2$,un cuadrado impar mayor que 1.

Para establecer el recíproco, supongamos que en el triángulo ABC, $a + c$ es un cuadrado impar mayor que 1. Demostaremos que existe un par de números naturales u, v, de paridad opuesta, que verifican las condiciones del Teorema 1.

Como $a+c=(2w+1)^2$,para algún número natural $w>1$, y necesitamos que esto sea igual a $(u+v)^2$, podemos tomar $u=w+1, v=w$. Es claro que w y $w+1$ son de paridad opuesta y además primos entre sí. Ya que esos u y v verifican (3), dan lugar aun triángulo armónico primitivo ABC.

<u>Caso 2:</u>

Supongamos que u y v tienen la misma paridad. Para que puedan ser primos entre sí, tienen que ser los dos impares. En este caso, $u+v$ es par, así que $mcd(a,b,c)=2$. (La justificación de ésto se deja al lector). Para tener un triángulo ABC primitivo, dividimos por 2 y tomamos el nuevo triángulo con

$$a=\frac{1}{2}u\left(u+v\right), b=uv, c=\frac{1}{2}v\left(u+v\right)$$

En este triángulo se verifica

$$a+c=\frac{1}{2}u\left(u+v\right)+\frac{1}{2}v\left(u+v\right)=\frac{1}{2}\left(u+v\right)^2.$$

Como $u+v=2w$, con $w\geq 1$,se tiene $a+c=2w^2$, el doble de un cuadrado.

Recíprocamente, supongamos que $a+c=2w^2$ en el triángulo ABC.

Si $w=1$,se tiene el triángulo equilátero armónico primitivo $(1,1,1)$.

Si $w>1$, entonces w puede ser par o impar. Supongamos primero que es impar.

Si $w=3$,entonces $u+v=6$.El único par posible es $u=5, v=1$, que no da lugar a ningún triángulo .

Luego $w>3$.En este caso podemos tomar $u=w+2, v=w-2$, que satisface (4) y construir un triángulo primitivo armónico ABC.

Si w es par, entonces tiene que ser mayor que 2 (*¿por qué?).* En este caso podemos tomar los números impares $u=w+1, v=w-1$, que verifican (5) para generar un triángulo armónico primitivo ABC. Esto concluye la demostración.$\blacksquare$

Para mayor clarificación del argumento, proporcionamos una ilustración numérica:

(i) Supongamos que $(u+v)^2=121=11^2$, un cuadrado impar. Se tiene $u+v=11$.

Podemos tomar $u=6, v=5$, que dan $(a,b,c)=(66,60,55)$.

También podemos tomar $u=7, v=4$, que da un triángulo diferente, $(a,b,c)=(77,56,44)$. El lector puede comprobar que no hay más con $u+v=11$.

(ii) Supongamos $a+c=98=2\times(7)^2$, el doble de un cuadrado impar. Ahora $u+v=2\times 7=14$. Luego podemos tomar $u=7+2=9, v=7-2=5$, que genera el triángulo $(a,b,c)=(63,45,35)$.

(iii) Supongamos $a+c=288=2\times(12)^2$, el doble de un cuadrado par. Aquí, $u+v=24, u=12+1=13, v=12-1=11$, y $(a,b,c)=(156,143,132)$.

Problemas propuestos

Finalizamos nuestra disertación con problemas propuestos a los lectores.

1.*Supongamos que ABC es un triángulo de Hoppe (sus lados AB,BC,CA están en progresión aritmética), inscrito en una circunferencia. AD es la bisectriz del ángulo A, con D en el lado BC. Se prolonga la bisectriz hasta que corte de* *nuevo a la circunferencia circunscrita en D'. Demostrar que : i)* $AD = \frac{1}{2}\sqrt{3bc}$. *ii) AD'=BD'+D'C.*

2. *Sea ABC un triángulo "autoalturas" en el que los lados AB,BC,CA están en progresión geométrica. Probar que los lados son proporcionales a las alturas, en un cierto orden.*

3. *Sea I el incentro de ABC. Demostrar que ABC es armónico si y sólo si las áreas de los triángulos BIC,CIA y AIB están en progresión armónica.*

4. *Sea w un número natural dado. ¿Es posible encontrar una fórmula cerrada como función de w que proporcione el número de*

a) *triángulos armónicos con lados naturales, primitivos, en los que (i)* $a+c = (2w+1)^2$;

(ii) $a + c = 2w^2$;

b) *triángulos armónicos con lados naturales, primitivos o no, en los que (i)*$a + c = (2w+1)^2$;

(ii) $a + c = 2w^2$?

Bibliografía

1. Dickson,L.E. *History of the Theory of Numbers, vol. II, Chelsea, New York (1971), 171-201.*

2.Sastry, K.R.S. *Analogies are interesting!. Elemente der mathematik, 59(2004), 29-36.*

3. Sastry, K.R.S. *Pythagoras strikes again! .Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, 24(1998),276-280.*

4.Sastry, K.R.S. *Self-Altitude triangles, Mathematical Spectrum, 22(1989-90),88-90.*

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI