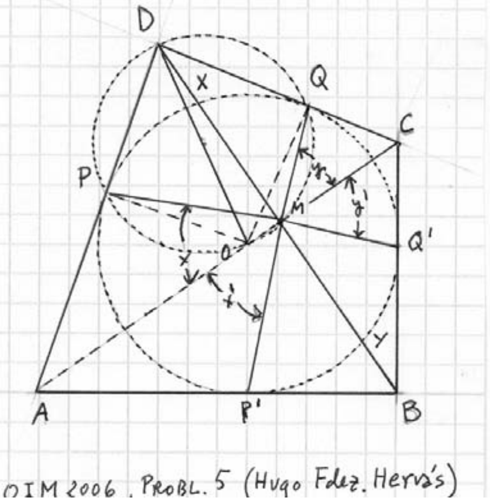
Problema 5(21 OIM, Guayaquil 2006)
Dada una circunferencia φ, considere un cuadrilátero ABCD con sus cuatro lados tangentes a φ, con AD tangente a φ en P y CD tangente a φ en Q. Sean X e Y los puntos donde BD corta a φ, y M el punto medio de XY. Demuestre que $\angle AMP = \angle CMQ$.

Solución de Hugo Fernández Hervás, durante el concurso:



Sea O el centro de la circunferencia, entonces el cuadrilátero POQD es cíclico, y su diámetro es OD pues $\angle DQO = \angle DPO = \pi/2$. Además, $XY \perp OM \Rightarrow BD \perp OM$; es decir, el ángulo DMO vale $\pi/2$, por lo que M también pertenece a la circunferencia circunscrita a POQD.
De esto se deduce que PMQD es cíclico y por tanto $\angle APM = \pi - \angle MQC$. Y aplicando el teorema del seno a los triángulos APM y CQM se obtiene que:
$\frac{AP}{AM} = \frac{sen(x)}{sen(\angle APM)}$ y $\frac{CQ}{CM} = \frac{sen(y)}{sen(\angle MQC)} = \frac{sen(y)}{sen(\pi - \angle APM)} = \frac{sen(y)}{sen(\angle APM)}$ siendo $x = \angle AMP$ e $y = \angle CMQ$.

Sean $P' = AB \cap \varphi$, $Q' = BC \cap \varphi$, $x' = \angle AMP'$ y $y' = \angle CMQ'$. Procediendo de igual manera que antes, se llega a:
$\frac{AP'}{AM} = \frac{sen(x')}{sen(\angle AP'M)}$ y $\frac{CQ'}{CM} = \frac{sen(y')}{sen(\angle AP'M)}$, pero AP y AP’ miden lo mismo, pues P y P’ son los puntos de tangencia a φ. Así mismo, CQ y CQ’ miden lo mismo. De donde se deduce que:
$\frac{sen(x)}{sen(\angle APM)} = \frac{sen(x')}{sen(\angle AP'M)}$ y $\frac{sen(y)}{sen(\angle APM)} = \frac{sen(y')}{sen(\angle AP'M)}$; dividiendo ambas expresiones:
$\frac{sen(x)}{sen(y)} = \frac{sen(x')}{sen(y')}$.
Por otro lado, se puede observar que $x + x' = y + y' < \pi$ pues
$x + x' = \pi - (\angle P'MB + \angle PMD) = \pi - (\angle Q'MB + \angle QMD) = y + y'$ esto es así pues DP=DQ, y por tanto el arco que abarcan $\angle PMD$ y $\angle QMD$ en la circunferencia circunscrita a PMQD es el mismo, por lo que son iguales, lo mismo para $\angle P'MB$ y $\angle Q'MB$.
Ahora bien, el sistema de ecuaciones:

$$\frac{sen(x)}{sen(y)} = \frac{sen(x')}{sen(y')}$$

$$x + x' = y + y' < \pi$$

Sólo tiene la solución $x = y; x' = y'$. Con lo que queda demostrado el enunciado.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI