EL TEOREMA DE SONDAT

UNA DEMOSTRACIÓN PURAMENTE SINTÉTICA

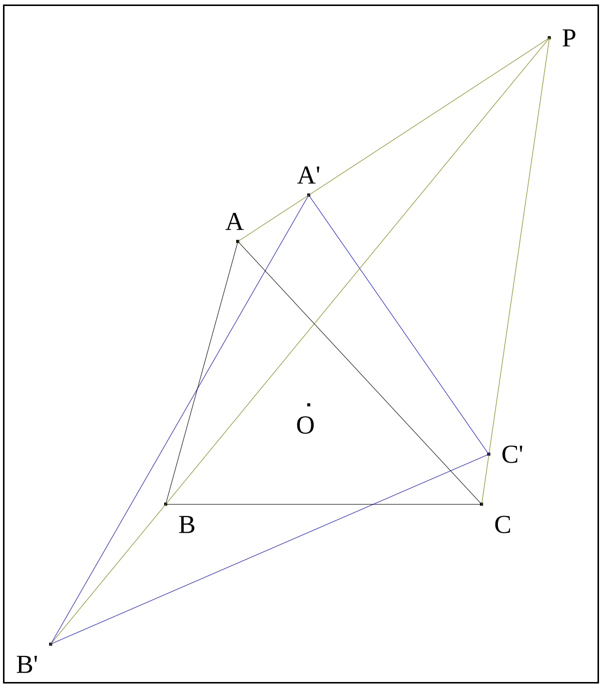
Jean - Louis AYME

Lycée Lislet Geoffroy, 97400 St Denis, Île de la Réunion, France

Resumen. Presentamos una demostración enteramente sintética del teorema de Pierre Sondat, así como una breve nota histórica. Esta prueba está basada en dos lemas que conducen, primero, al pequeño teorema de Sondat y en segundo lugar al teorema de Sondat. Todos los resultados citados pueden ser probados sintéticamente.

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN

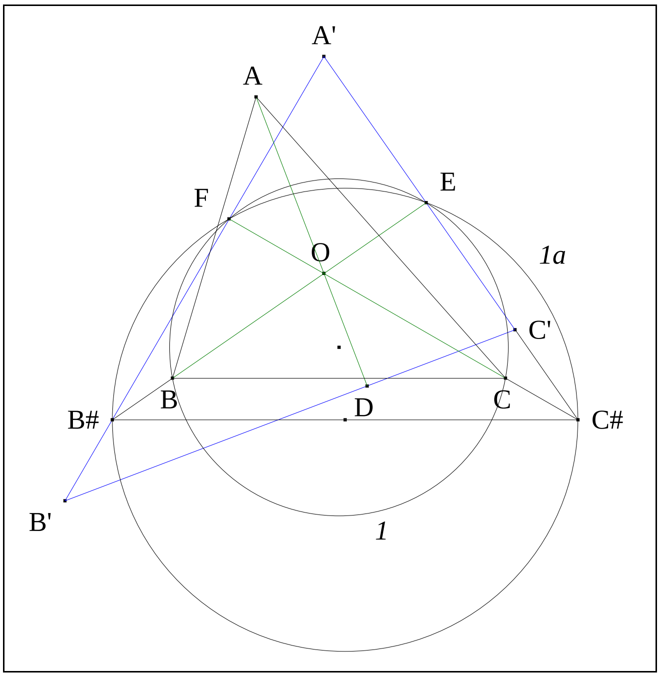
1. Lema 1



Hipótesis:	ABC, A'B'C'	dos triangulos bilogicos (cf. Anexo 6) en posicion general,
	O	el centro común de ortología de ABC y A'B'C'
y	P	el punto de intersección de las rectas (AA') y (BB').

Conclusión : la recta (CC') pasa por P.

Demostración :



- Sean D, E, F los puntos de intersección de (AO) y (B'C'), de (BO) y (C'A'), de (CO) y (A'B').

- Escolio : por hipotesis, (AOD) $\perp$ (B'C') y (A'O) $\perp$ (BC)
  (BOE) $\perp$ (C'A') y (B'O) $\perp$ (CA)
  (COF) $\perp$ (A'B') y (C'O) $\perp$ (AB).

- Sean B#, C# los puntos de intersección de (BE) y (A'B'), de (CF) y (A'C').

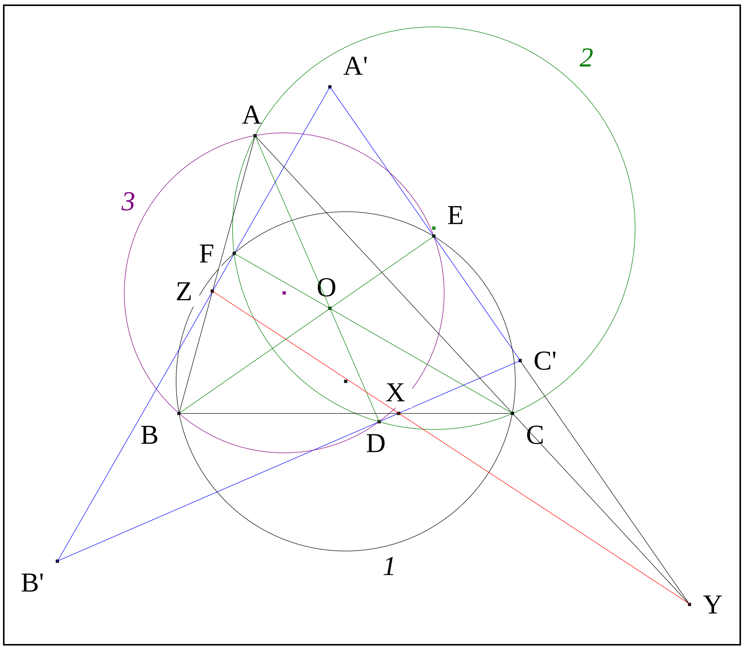
- Tenemos : O es el ortocentro del triángulo A'B#C# ;
  en consecuencia, (B#C#) $\perp$ (A'O) ;
  por hipótesis, (A'O) $\perp$ (BC) ;
  luego de ahí se sigue que (B#C#) // (BC).

- Escolio : la circunferencia de diámetro [B#C#] pasa por E y F.

- Llamemos *1a* a esa circunferencia.

- Conclusion parcial : por un réciproco del teorema de Reim (cf. Anexo 2) aplicado a *1*a,
  Los puntos B, C, E y F son concíclicos.

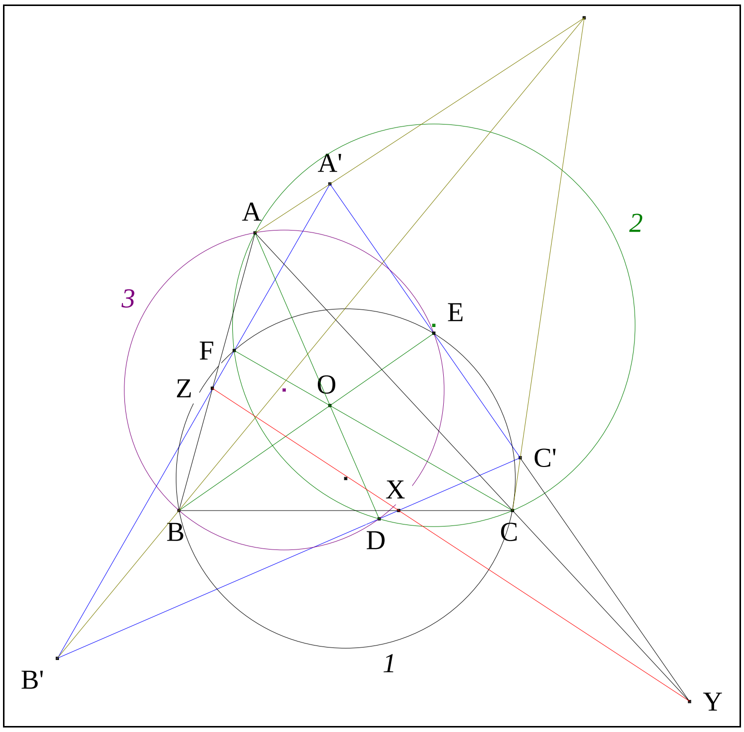
- Llamemos *1* a esa circunferencia.



- Mutatis mutandis, demostraríamos que los puntos C, A, F y D son concíclicos
  los puntos A, B, D y E son concíclicos.

- Llamemos *2, 3* a esas dos últimas circunferencias
  y X, Y, Z los puntos de intersección de (B'C') y (BC), de (C'A') y (CA), de (A'B') y (AB).

- Según un teorema de Dergiades (cf. Anexo 3), los puntoss X, Y y Z están alineados.



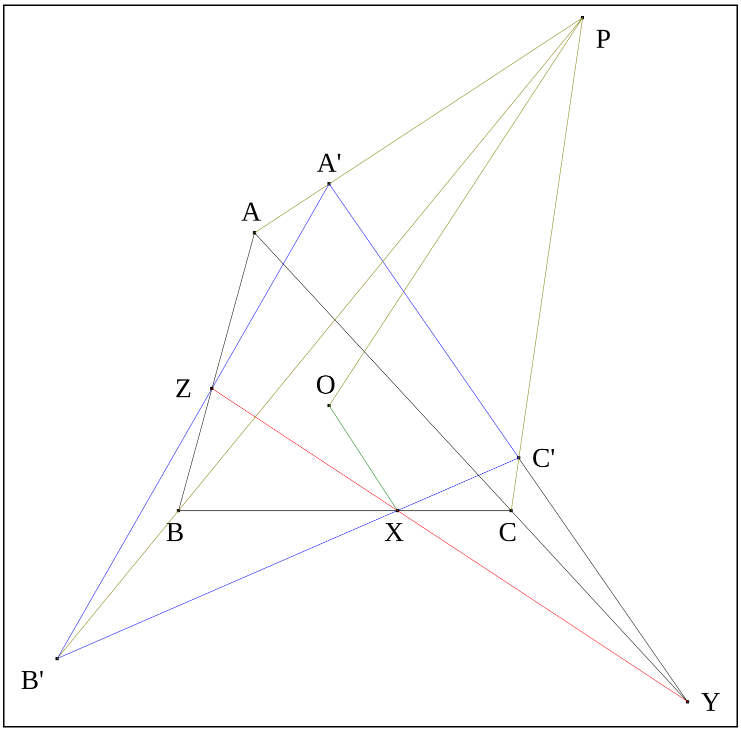
- Según el teorema de los triángulos de Desargues (cf. Anexo 4),
  Por ser (XYZ) el eje de perspectiva de ABC y A'B'C', P es el centro de perspectiva de ABC y A'B'C'.

- Conclusión : la recta (CC') pasa por P.

Enunciado tradicional : dos triángulos bilogicos son perspectivos.

El resultado a recordar : dados dos triángulos bilógicos en posición general,
dos vértices de uno y sus proyecciones sobre los lados correspondientes del otro, son concíclicos.

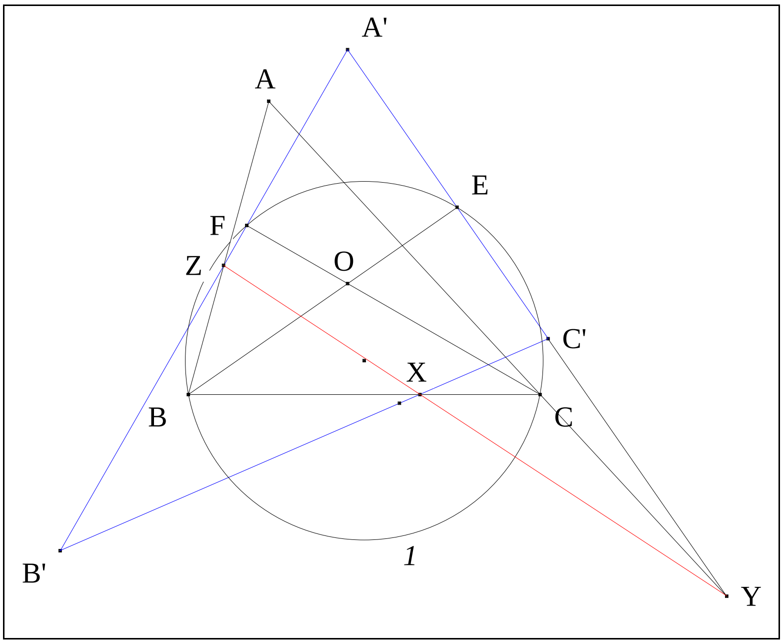
2. Lema 2



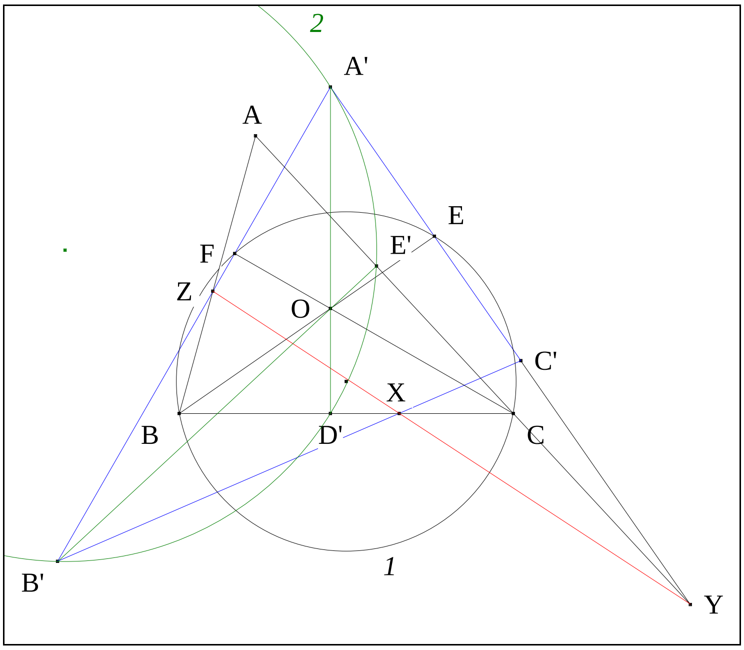
Hipótesis :	ABC, A'B'C'	dos triángulos bilógicos en posicion general,
	O	el centro común de ortología de ABC y A'B'C',
	P	el centro de perspectiva de ABC y A'B'C',
y	(XYZ)	el eje de perspectiva de ABC y A'B'C'.

Conclusión : las rectas (OX) y (AA'P) son perpendiculares.

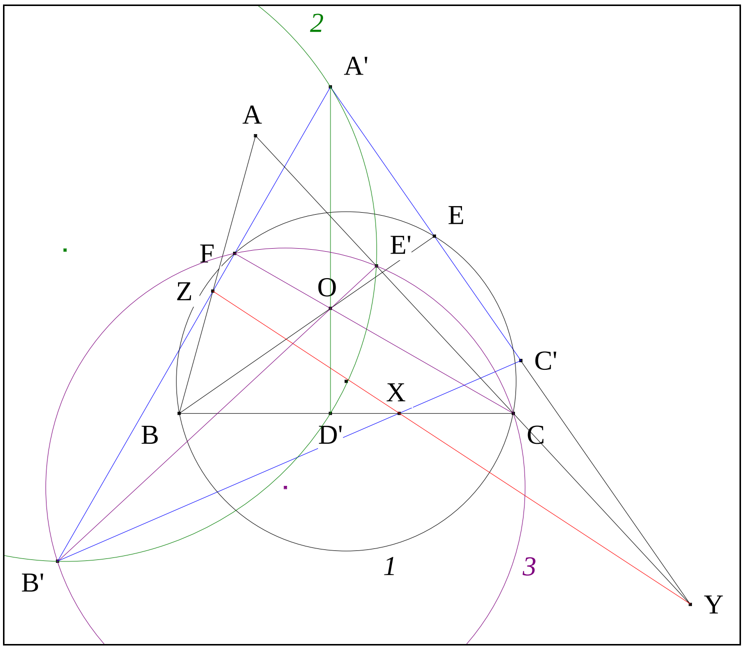
Demostración :



- Sean E, F los puntos de intersección de (BO) y (C'A'), de (CO) y (A'B').
- Según el lema 1, los puntos B, C, E y F son concíclicos.
- Llamemos *1* a esa circunferencia.

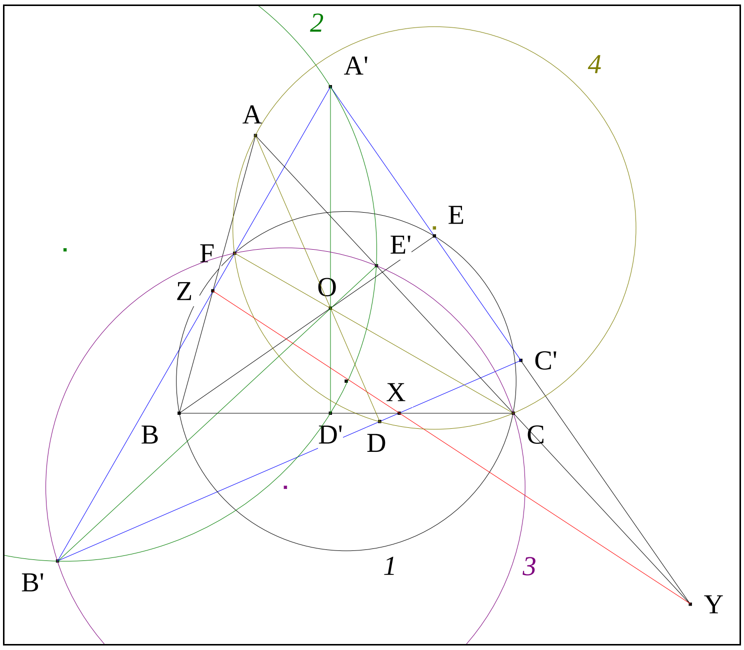


- Sean D', E' los puntos de intersección de (A'O) y (BC), de (B'O) y (CA).
- Según el lema 1, los puntos A', B', D' y E' son concíclicos.
- Llamamos *2* a esa circunferencia.
- Potencia del punto O respecto al círculo *2*, $\overline{OA'}.\overline{OD'} = \overline{OB'}.\overline{OE'}$.



- Llamemos 3 a la circunferencia de diámetro [B'C] ; pasa por F y E'.

- Potencia del punto O respecto al círculo 3, $\overline{OB'}\,.\overline{OE'} = \overline{OC}\,.\overline{OF}$.



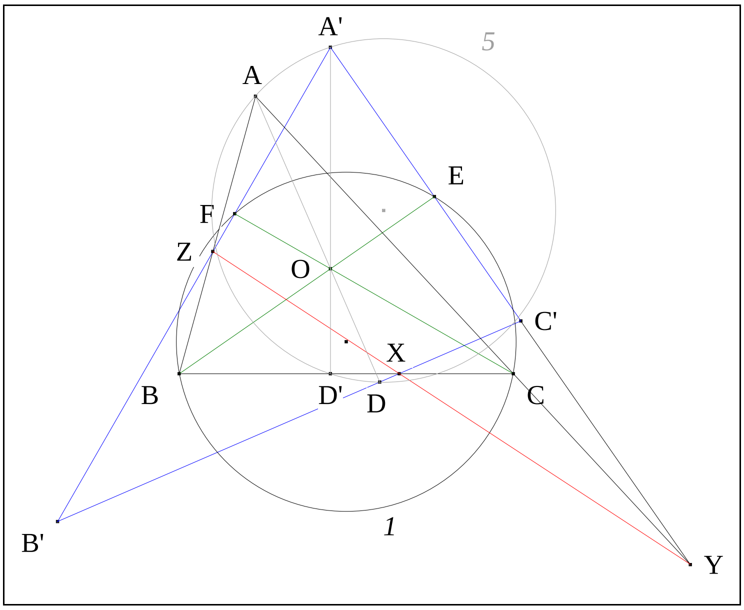
- Sea D el punto de intersección de (AO) y (B'C')

- Según el lema 1, los puntos A, C, F y D son concíclicos.

- Llamemos 4 a esa circunferencia.

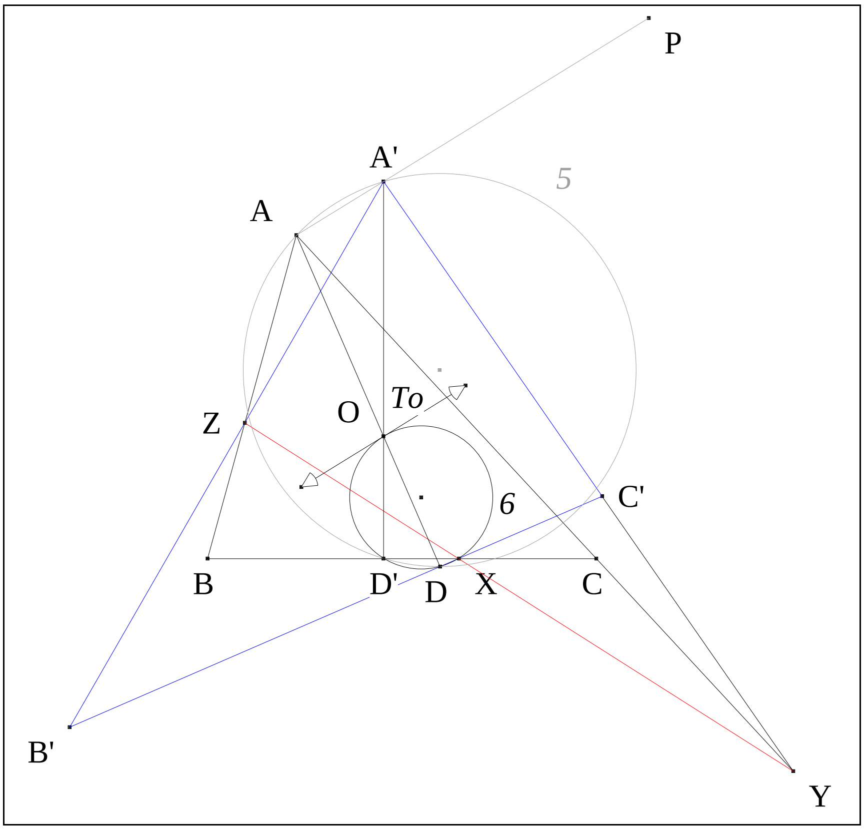
- Potencia del punto O respecto al círculo *4*, $\overline{OC}\,.\overline{OF} = \overline{OA}\,.\overline{OD}$;

  Por la transitividad de la igualdad, =, $\overline{OA'}\,.\overline{OD'} = \overline{OA}\,.\overline{OD}$.



- Conclusión parcial : los puntos A, A', D y D' son concíclicos.

- Llamemos *5* a esa circunferencia.



- Escolio : la circunferencia de diámetro [OX] pasa por D y D'.

- Llamemos *6* esa circunferencia
  y To la tangente a *6* en O.

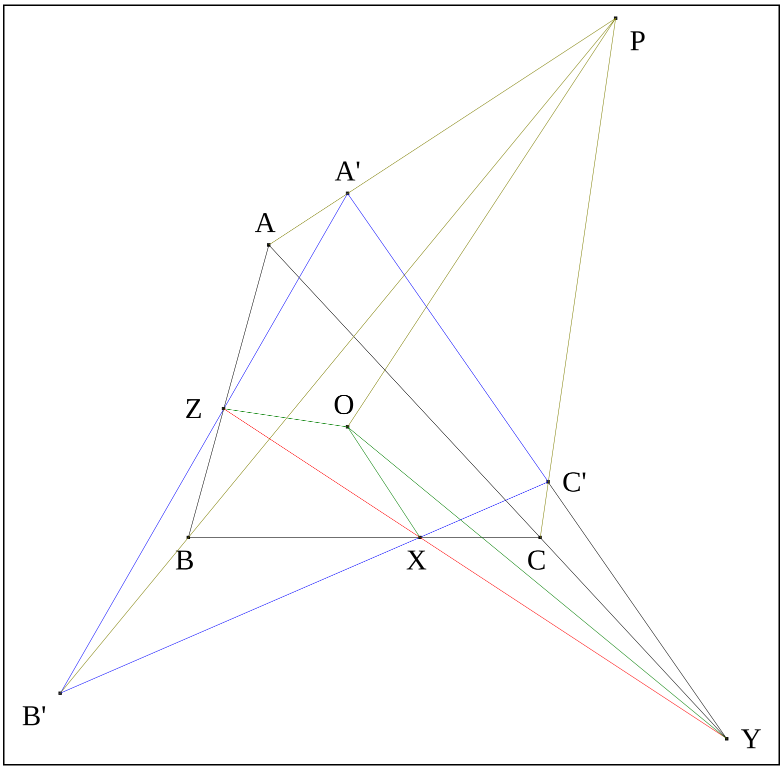
- Por definición de tangente, (OX) ⊥ To.

- En un caso particular del teorema de Reim (cf. Anexo 1) aplicado a *5* y *6*, To // (AA') ;

en consecuencia, (OX) ⊥ (AA').

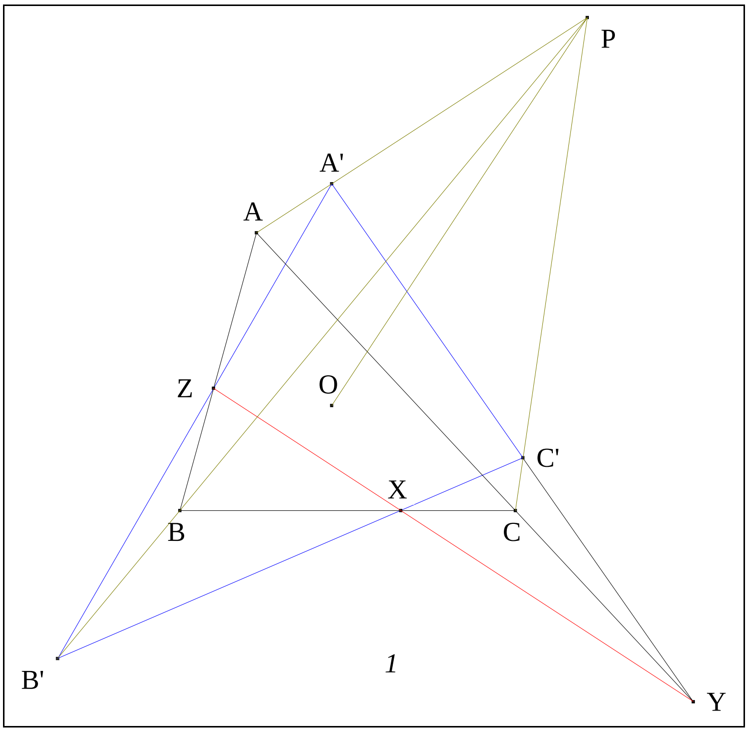
- Conclusión : las rectas (OX) y (AA'P) son perpendiculares.

Escolio : otras dos perpendicularidades



- Mutatis mutandis, probaríamos que las rectas (OY) y (BB'P) son perpendiculares
  las rectas (OZ) y (CC'P) son perpendiculares.

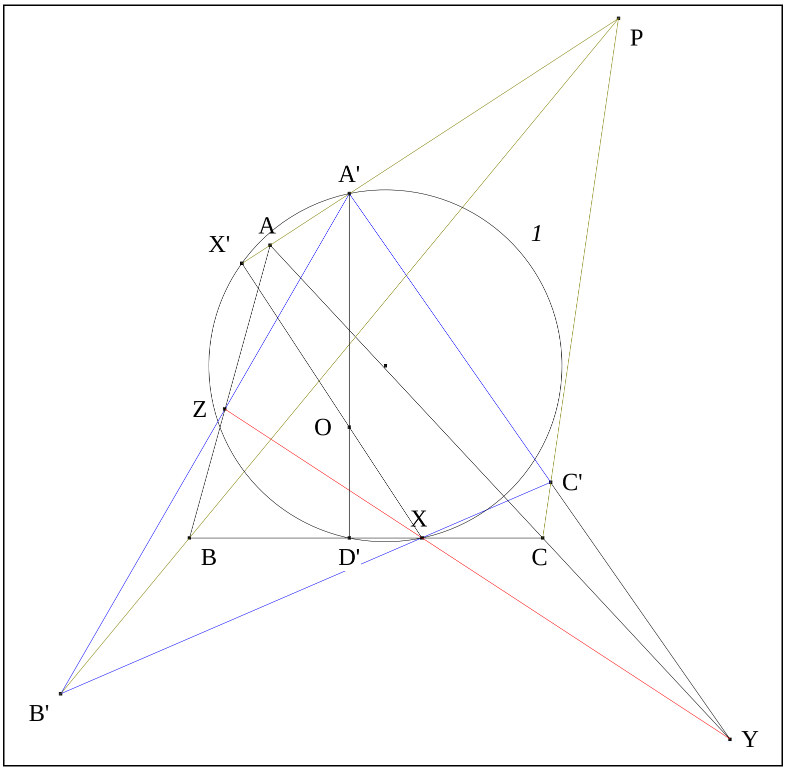
3. El pequeño teorema de Sondat



Hipótesis : ABC, A'B'C' dos triángulos bilógicos en posicion general,
O el centro común de ortología de ABC y A'B'C',
P el centro de perspectiva de ABC y A'B'C',
y (XYZ) el eje de perspectiva de ABC y A'B'C'.

Conclusión : las rectas (OP) y (XYZ) son perpendiculares.

Demostración :

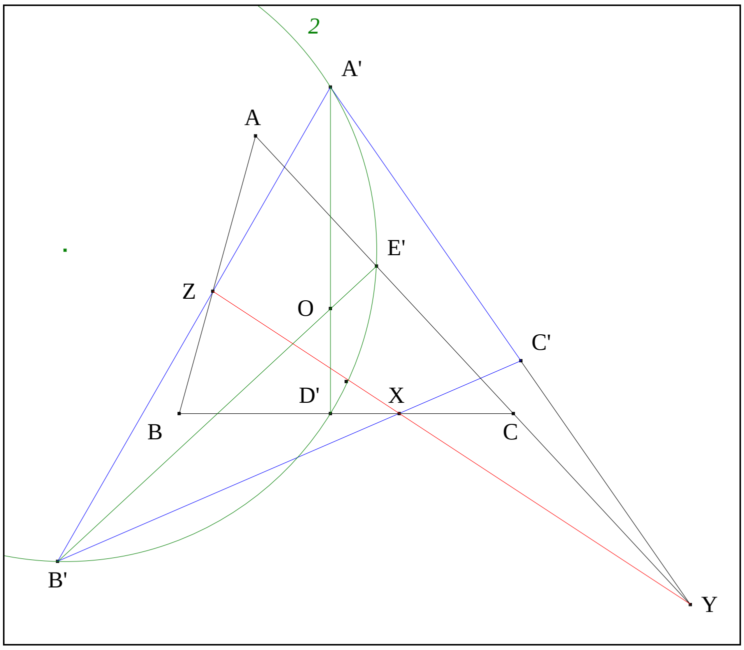


- Llamemos D' al punto de intersección de (A'O) y (BC),
  y X' al punto de intersección de (OX) y (PAA').

- Escolio : el círculo de diámetro [A'X] pasa por D' y X'.

- Llamemos *1* a esa circunferencia.

- Potencia de O respecto a *1*, $\overline{OX}\,.\overline{OX'} = \overline{OA'}\,.\overline{OD'}$.

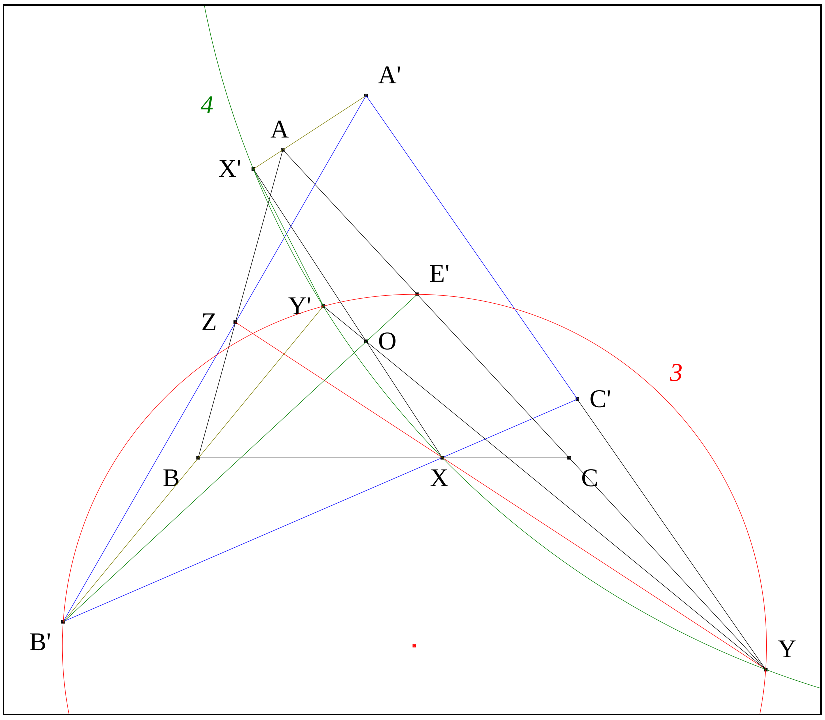


- Llamemos E' al punto de intersección de (B'O) y (CA).

- Según el lema 1, los puntos A', B', D' y E' son concíclicos.

- Llamemos *2* a esa circunferencia.

- Potencia de O respecto a *2*, $\overline{OA'}\,.\overline{OD'} = \overline{OB'}\,.\overline{OE'}$.



- Sea Y' el punto de intersección de (OY) y (BB').

- Escolio : el círculo de diámetro [B'Y] pasa por E' y por Y'.

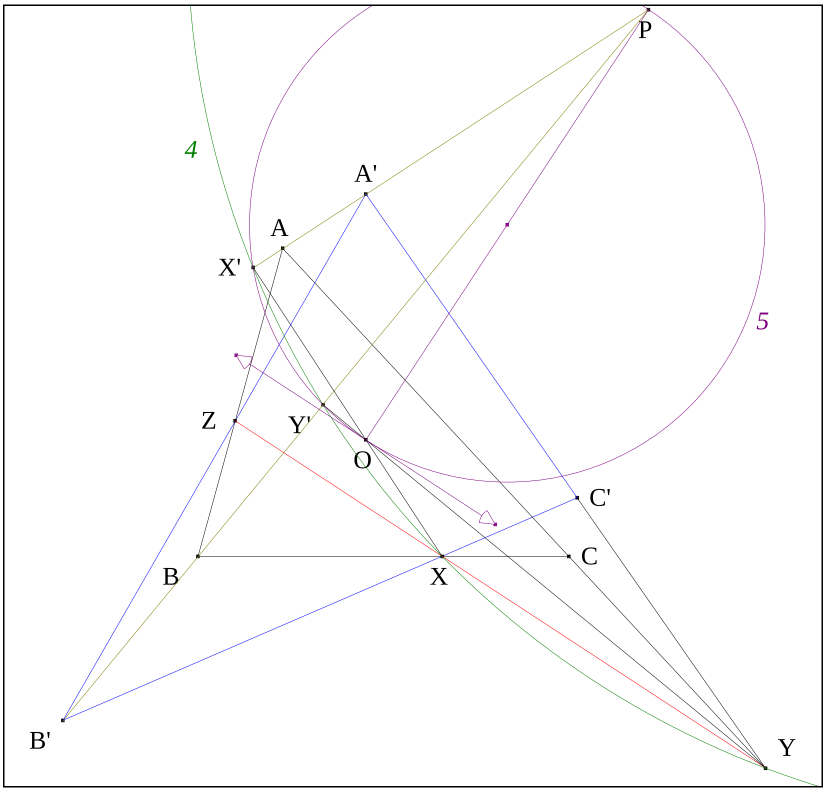
- Sea *3* esa circunferencia.

- Potencia de O respecto a *3*, $\overline{OB'}.\overline{OE'} = \overline{OY'}\ .\overline{OY'}$;

  Por la transitividad de la igualdad, =, $\overline{OX}\ .\overline{OX'} = \overline{OY}\ .\overline{OY'}$.

- Conclusión parcial : los puntos X, X', Y e Y' son concíclicos.

- Sea *4* esa circunferencia.



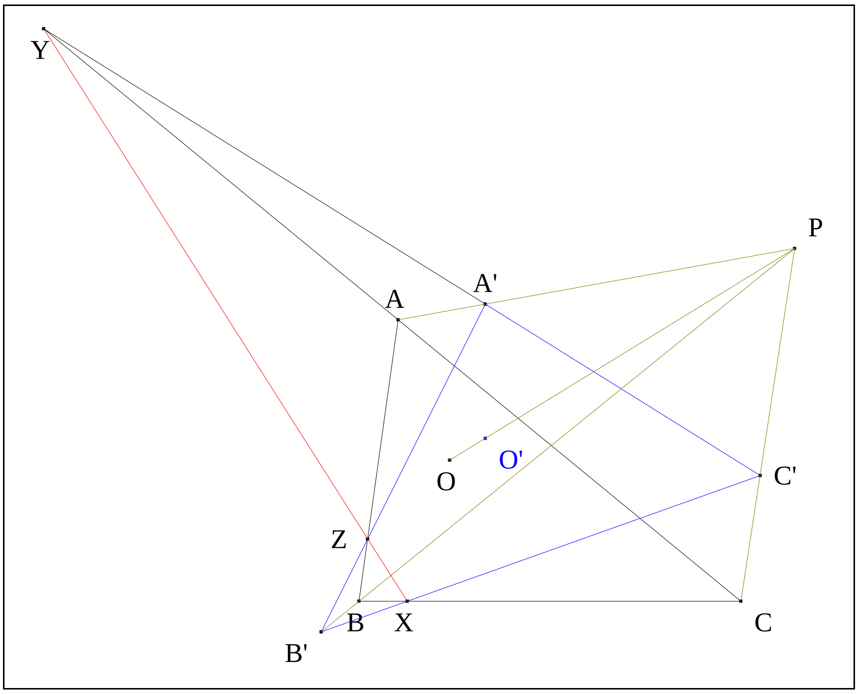
- Sea *5* la circunferencia de diámetro [OP] ; pasa por X' e Y' ;
  y To la tangente à *5* en O.

- En un caso particular del teorema de Reim (cf. Anexo 1) aplicado a *4* y *5*, (XY) // To.

- Por definición de tangente, To $\perp$ (OP) ;
  en consecuencia, (XY) $\perp$ (OP).

- Conclusión : las rectas (OP) y (XYZ) son perpendiculares.

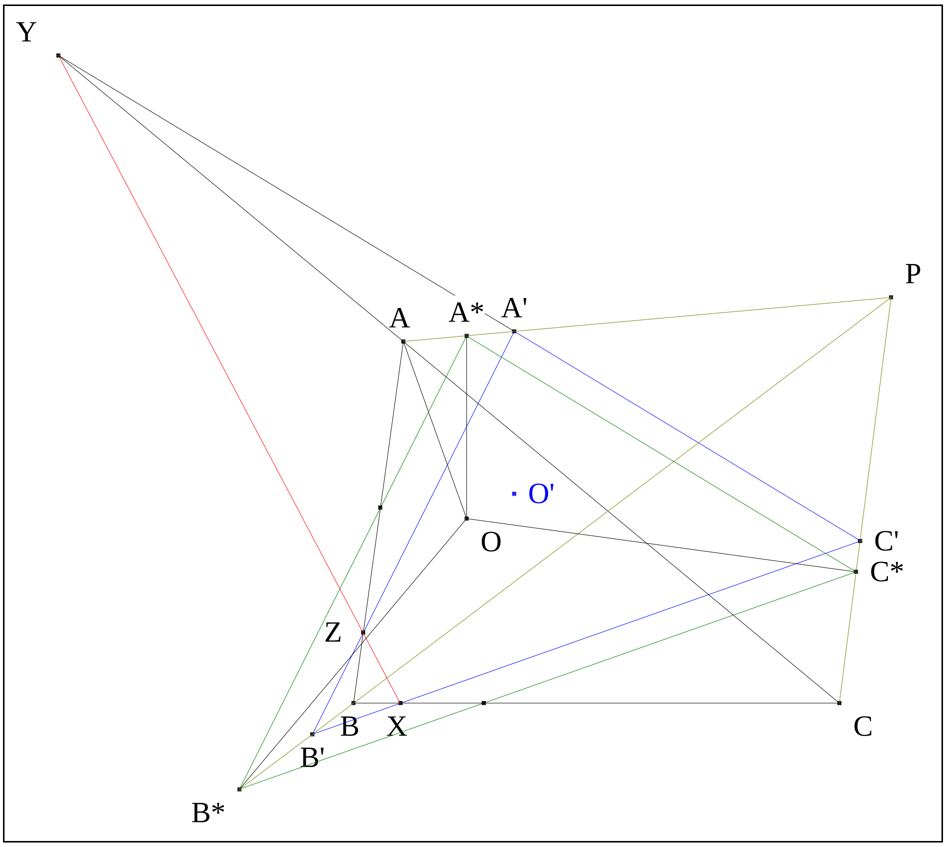
4. El teorema de Sondat [1]



Hipótesis :	ABC, A'B'C'	dos triángulos ortológicos y perspectivos en posición general,
	O	el centro de ortología de ABC respecto à A'B'C',
	O'	el centro de ortología de A'B'C' respecto a ABC,
	P	el centro de perspectiva de ABC y A'B'C',
y	(XYZ)	el eje de perspectiva de ABC y A'B'C'.

Conclusión : la recta (OO') pasa por P y es perpendicular à (XYZ).

Demostración :



- Escolio : las rectas (AA'), (BB') y (CC') son concurrentes en P.

- Partimos del triángulo ABC.

- Sean A* el punto de intersección de la perpendicular à (BC) que pasa por O con (PAA'),
  B* el punto de intersección de la paralela à (A'B') que pasa por A* con (PBB')
  y C* el punto de intersección de la paralela à (B'C') que pasa por B* con (PCC').

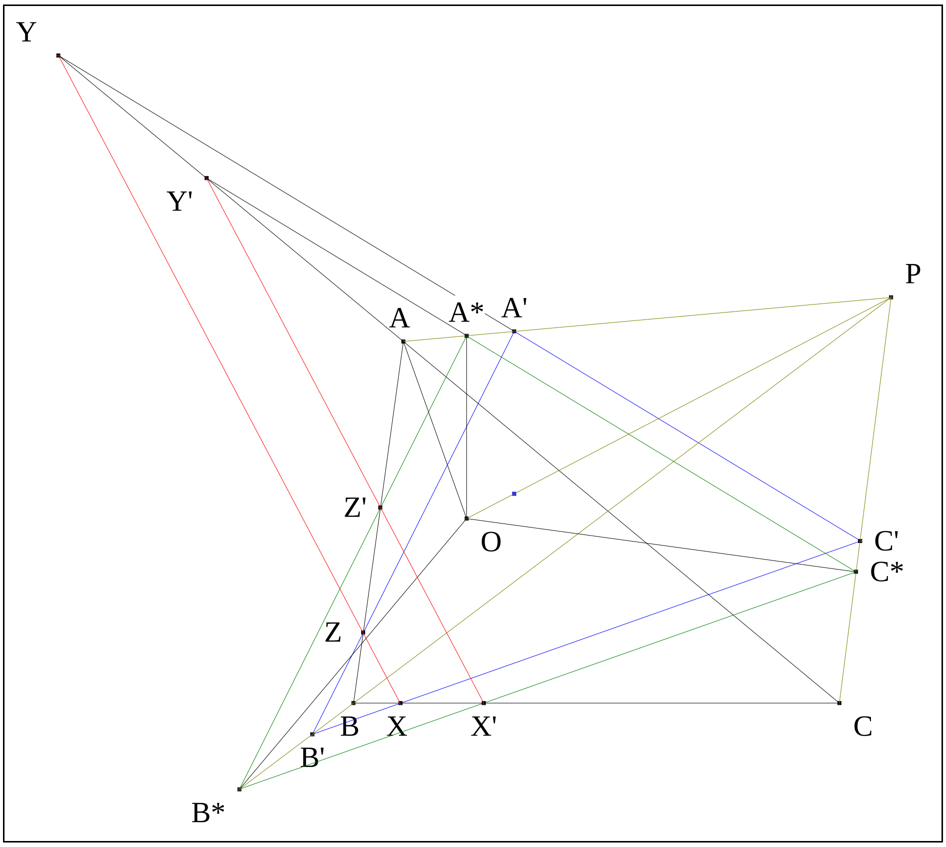
- Por el teorema débil de Desargues aplicado a los triángulos A*B*C* y A'B'C' ,en perspectiva de centro P, las rectas (A*C*) y (A'C') son paralelas. (cf Anexo 5)

- Escolio : A*B*C* y A'B'C' sont homotéticos y P es su centro de homotecia.

- Por hipótesis, (AO) ⊥ (B'C') ;
  tenemos : (B'C') // (B*C*) ;
  en consecuencia, (AO) ⊥ (B*C*).

- Mutatis mutandis, demostraríamos que (BO) ⊥ (C*A*)
  (CO) ⊥ (A*B*).

- Conclusión parcial : A*B*C* y ABC sont bilogicos y O es su centro común de ortología.

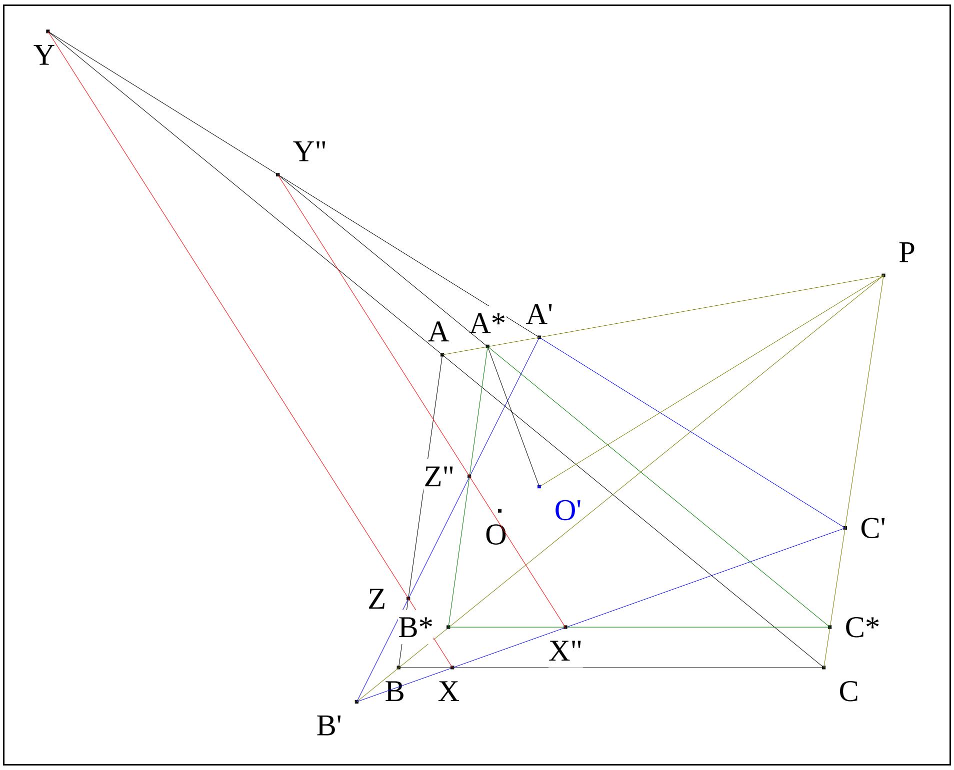


- Sean X', Y', Z' los puntos de intersección de (B*C*) y (BC), de (C*A*) y (CA), de (A*B*) y (AB).

- Según el teorema de los dos triángulos de Desargues (cf. Anexo 5), (X'Y'Z') es el eje de perspectiva de A*B*C* et ABC.

- Según el « pequeño teorema de Sondat » (OP) ⊥ (X'Y'Z') ;
  Según el resultado "Una paralela a un eje de perspectiva" (cf. Anexo 7), (XYZ) // (X'Y'Z') ;
  en consecuencia, (OP) ⊥ (XYZ).

- Conclusión parcial : las rectas (OP) y (XYZ) son perpendiculares.



- Partimos del triángulo A'B'C'.

- Sean A* el punto de intersección de la perpendicular a (B'C') que pasa por O' con (PAA'),
  B* el puntp de intersección de la paralela a (AB) que pasa por A* con (PBB')
  y C* el punto de intersección de la paralela a (BC) que pasa por B* con (PCC').

- Escolio : A*B*C* y ABC son homotéticos y P es su centro de homotecia.

- Mutatis mutandis, demostraríamos que (1) A*B*C* y ABC son bilógicos
  (2) O es su centro común de ortología.

- Sean X", Y", Z" los puntos de intersección
  de (B*C*) y (B'C'), de (C*A*) y (C'A'), de (A*B*) y (A'B').

- Según el teorema de los dos triángulos de Desargues (cf. Anexo 5),
  (X"Y"Z") es el eje de perspectiva de A*B*C* y A'B'C'.

- Según el " pequeño teorema de Sondat", (O'P) ⊥ (X"Y"Z") ;
  Según el resultado "Una paralela a un eje de perspectiva" (cf. Anexo 7), (X"Y"Z") // (XYZ) ;
  en consecuencia, (O'P) ⊥ (XYZ).

- Por ser las rectas (OP) y (O'P) perpendiculares a la recta (XYZ), (OP) // (O'P).

- Conclusión parcial : por el postulado de Euclides, los puntos O, O' y P están alineados.

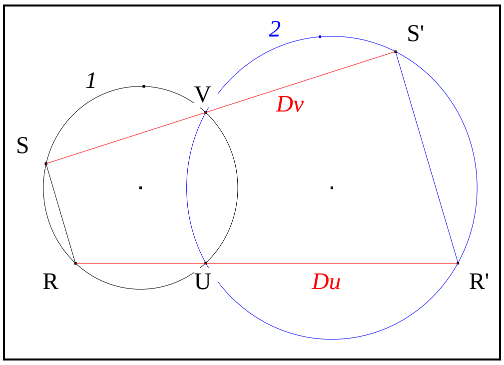
- Conclusión : la recta (OO') pasa por P y es perpendicular a (XYZ).

NOTA HISTÓRICA

Pierre Sondat fué profesor en Annecy (Francia) y es conocido por haber publicado algunos artículos notables en los *Nouvelles Annales* de 1875 a 1880.
En 1894, propone en *L'intermédiaire des mathématiciens*, una conjetura que se convertirá en el "teorema de Sondat". Al año siguiente, en la misma revista, R. Sollertinsky [2] da una demostración proyectiva difícil de comprender.
Una demostración de este resultado se encontraría también en el libro *Parmi les plus belles figures de Géométrie dans l'espace* de Victor Thébault en el que no hay ninguna figura.
En 1922, en la revista *Mathesis*, Joseph Neuberg [3] da otra referencia [4] del teorema de Sondat y presenta une prueba proyectiva que atribuye a Servais [5].
En 1924, Victor Thébault [6] generaliza el teorema a los tetraedros. En 1952, Thébault [7] presenta una demostración métrica del teorema de Sondat recurriendo a los teoremas de Menelao y Stewart, asi como una demostración de su generalización.
En 1994, Rina y Marius Mitrea [8] proponen a su vez una solución puramente vectorial, así como Alexei Zaslavsky [9].

ANEXOS

1. El teorema de Reim [10]

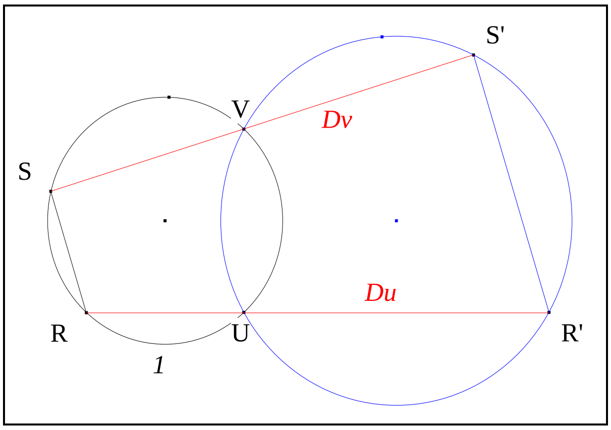


Hipótesis :	*1*, *2*	dos cículos secantes,
	U, V	los puntos de intersección de *1* y *2*,
	*D*u	una recta que pasa por U,
	R, R'	los segundos puntos de intersección de *D*u con *1*, *2*,
	*D*v	una recta que pasa por V
y	S, S'	los segundos puntos de intersección de *D*v con *1*, *2*.

Conclusión : las rectas (RS) y (R'S') son parallelas.

Escolio : si los puntos R y S coinciden, entonces la tangente a *1* en R y (R'S') son parallelas.

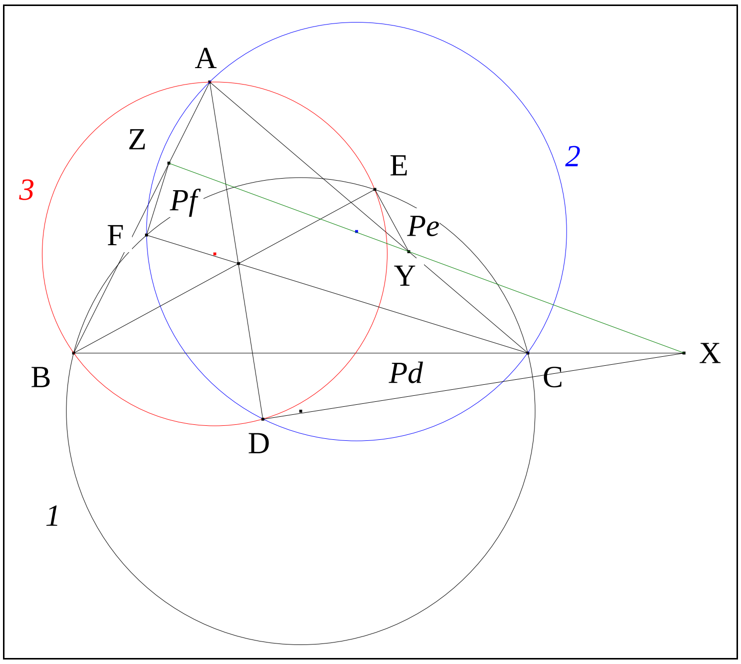
2. Un recíproco del teorema de Reim



Hipótesis :	*1*	una circunferencia,
	U, V	dos puntos de *1*,
	*D*u, *D*v	dos rectas que pasan por U, por V,
	R, S	los segundos puntos de intersección de *D*u, *D*v con *1*,
y	R', S'	dos puntos de *D*u, *D*v tales que (R'S') sea paralela à (RS)

Conclusión : los puntos U, V, R' y S' son concíclicos.

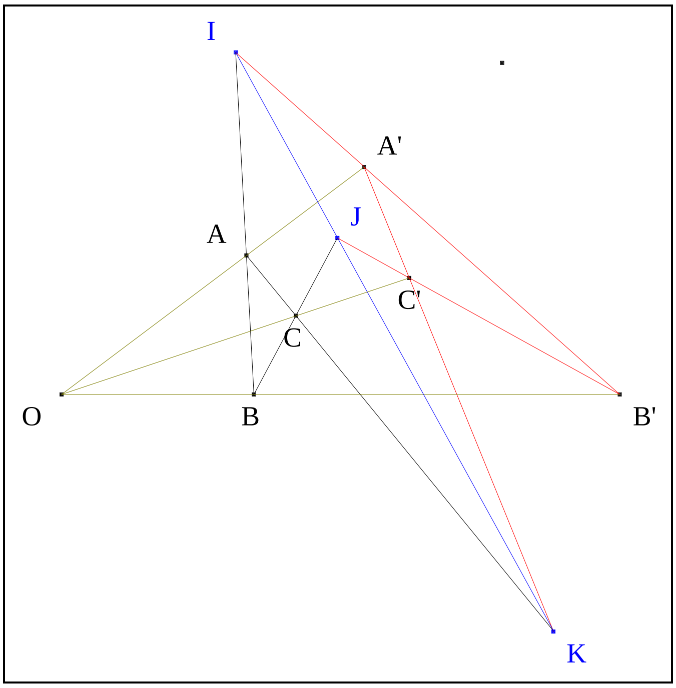
3. Un teorema de Dergiades [11] reformulado por el autor



Hipótesis :	ABC	un triángulo,
	1, *2*, *3*	tres circulos passando por B y C, por C y A, por A y B,
	D, E, F	los segundos puntos de intersección de *2* y *3*, de *3* y *1*, de *1* y *2*,
	*P*d , *P*e , *P*f	las perpendiculares a las rectas (AD), (BE), (CF) en D, E, F,
y	X, Y, Z	los puntos de intersección de *P*d y (BC), de *P*e y (CA), de *P*f y (AB).

Conclusión : los puntos X, Y y Z están alineados.

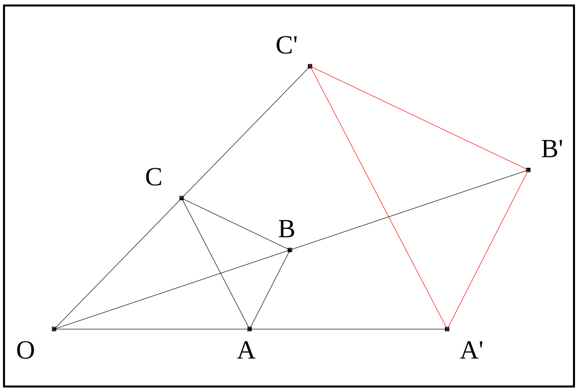
5. El teorema de los dos triángulos de Desargues



Hipótesis : ABC un triángulo,
A'B'C' un triángulo tal que les rectas (AA') y (BB') sean concurrentes,
O el punto de intersección de (AA') y (BB'),
e I, J, K los puntos de intersección de (AB) y (A'B'), de (BC) y (B'C'), de (CA) y (C'A').

Conclusión : (CC') pasa par O *si, y solamente si,* los puntos I, J y K están alineados.

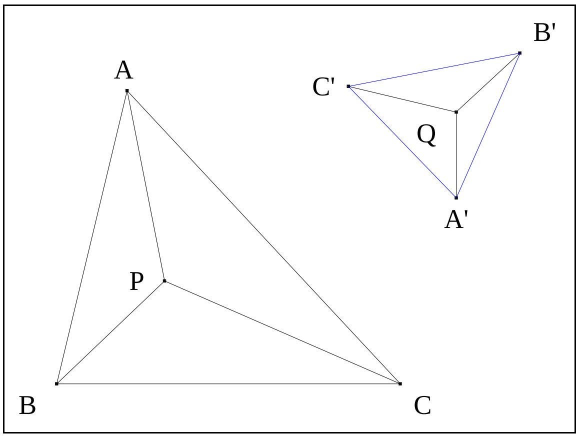
5. El teorema débil de Desargues



Hipótesis : ABC un triángulo,
y A'B'C' un triángulo tal que (1) (AA') y (BB') sean concurrentes en O
(2) (AB) sea paralela a (A'B')
(3) (BC) sea paralela a (B'C')

Conclusión : (CC') pasa por O *si, y solamente si,* (AC) es paralela a (A'C').

6. Dos triángulos ortologicos



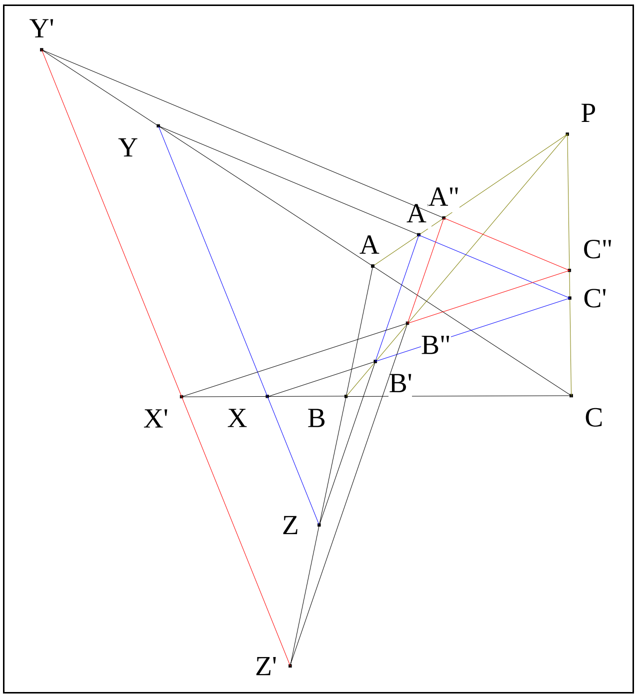
Definictiones : el triángulo ABC es ortológico al triángulo A'B'C' si las perpendiculares trazadas por los vértices de ABC sobre los lados correspondientes de A'B'C' son concurrentes.
Ese punto de concurrencia, llamado P, es el centro de ortología de ABC respecto a A'B'C'.

La relación "es ortológico à" siendo simétrica ,implica que las perpendiculares trazadas por los vértices de A'B'C' sobre los lados correspondientes de ABC son también concurrentes.
Ese punto de concurrencia, llamado Q, es el centro de ortología de A'B'C' respecto ABC.

De una manera general, diremos que ABC y A'B'C' son ortológicos.

Cuando los dos centros de ortología coincidan, diremos que los triángulos son bilógicos.

7. Una paralela a un eje de perspectiva



Hipótesis :	ABC, A'B'C'	dos triángulos perspectivos en posición general,
	P	el centro de perspectiva de A'B'C' y ABC,
	(XYZ)	el eje de perspectiva de A'B'C' y ABC,
	A"B"C"	un triángulo homotético y en perspectiva de centro P con A'B'C'
y	(X'Y'Z')	el eje de perspectiva de A"B"C" y ABC.

Conclusión : (X'Y'Z') es paralela a (XYZ).

REFERENCIAS

[1] Sondat P., Question 38, *L'intermédiaire des mathématiciens* (1894) 10.
[2] Sollertinsky R., *L'intermédiaire des mathématiciens* (1895) 94 ou 44.
[3] Neuberg J., Bibliographie du triangle et du tétraèdre, *Mathesis* (1922) 163.
[4] Fuhrmann, Dissertation, Königsberg (1902).
[5] Servais Cl., *Nouvelles Annales* (1919) 260.
[6] Thébault V., *Bulletin* de l'Académie royale de Belgique (1921) 57.
[7] Thébault V., Perspective and orthologic triangles and tetrahedrons, *Monthly*, 59, vol. 1 (1952) 24-28.
[8] Mitrea D. and M., A Generalization of a Theorem of Euler, *Monthly*, 101, vol. 1 (1994) 55-58.
[9] Zaslavsky A., http://garciacapitan/auna.com/
[10] F. G.-M., Théorème 124, *Exercices de Géométrie*, 6-ième éd. (1920), Rééd. J. Gabay, Paris (1991) 283.
[11] Dergiades N., Othogonal colinearity theorem, Message *Hyacinthos* # 6466 du 02/02/2003.

Agradecimientos. Agradezco profundamente al Profesor Francisco Bellot Rosado por haber releído, traducido y referenciado este artículo.

Jean-Louis Ayme jeanlouisayme@yahoo.fr

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI