

**MÁXIMOS Y MÍNIMOS SIN DERIVACIÓN :  
TRES EJEMPLOS**

*Abderrahim Ouardini*

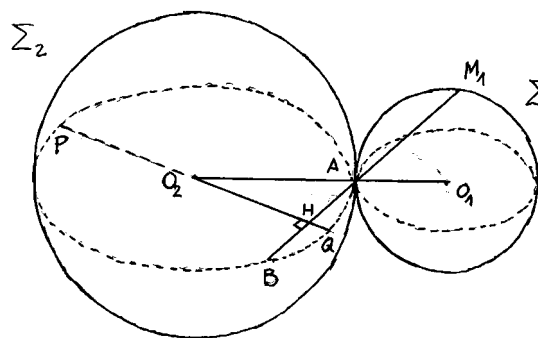
(versión española de F.Bellot)

**Ejemplo 1**

En el espacio, dos esferas distintas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  son tangentes exteriores en el punto A. ¿Cuál es el máximo valor del área del triángulo  $AM_1M_2$  cuando los puntos  $M_1$  y  $M_2$  describen, respectivamente,  $\Sigma_1 - \{A\}$  y  $\Sigma_2 - \{A\}$ ?

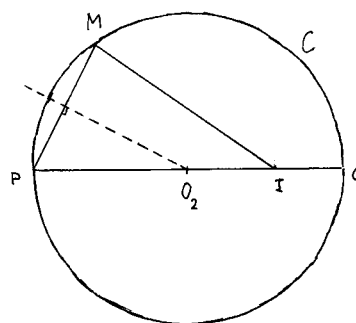
**Solución**

Fijemos primero el punto  $M_1$ . El área del triángulo  $AM_1M_2$  será máxima cuando la distancia del punto  $M_2$  a la recta  $AM_1$  sea máxima. Como  $M_2$  es distinto de A, la recta  $AM_1$  corta a la esfera  $\Sigma_2$  en un segundo punto B.



En el plano  $AO_2B$  ( $O_1$  y  $O_2$  son los respectivos centros de las dos esferas), la mediatriz del segmento AB corta a la esfera  $\Sigma_2$  en dos puntos distintos P y Q, con  $I \in [O_2Q]$ , siendo I el punto medio de AB. Si M es un punto cualquiera de  $\Sigma_2$  se verifica

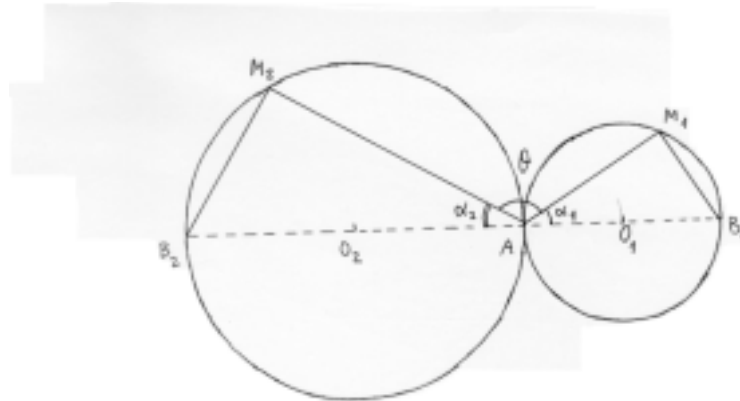
$$IP \geq IM.$$



(En la figura, C es el círculo máximo de  $\Sigma_2$ , intersección del plano PQM con  $\Sigma_2$ ).

La desigualdad se justifica porque los puntos I y M están situados en el mismo semiplano limitado por la mediatriz del segmento PM.

Por lo tanto, nuestro problema se convierte en la búsqueda del máximo del área del triángulo  $AM_1M_2$  en el caso en que los cuatro puntos  $O_1, M_1, M_2$  y  $O_2$  son coplanarios (es un plano que pasa por la línea de los centros  $O_1O_2$ ).



Sea  $R_i$  el radio de  $\Sigma_i$ .  
Se tiene :

$$\text{Area}(AM_1M_2) = \frac{AM_1 \cdot AM_2 \cdot \text{sen}\theta}{2}.$$

Como

$$AM_1 = 2R_1 \cdot \cos\alpha_1, \quad AM_2 = 2R_2 \cdot \cos\alpha_2,$$

entonces:

$$\begin{aligned} \text{Area}(AM_1M_2) &= 2R_1R_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= R_1R_2 [\text{sen}(2\alpha_1 + \alpha_2) + \text{sen}\alpha_2] \cos\alpha_2 \end{aligned}$$

Aquí se ha utilizado la identidad trigonométrica

$$\text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2) \cos\alpha_1 = \frac{1}{2}(\text{sen}(2\alpha_1 + \alpha_2) + \text{sen}\alpha_2).$$

Por lo tanto, podemos deducir que

$$\text{Area}(AM_1M_2) \leq R_1R_2 \cos\alpha_2(1 + \text{sen}\alpha_2),$$

puesto que  $\text{sen}(2\alpha_1 + \alpha_2) \leq 1$ .

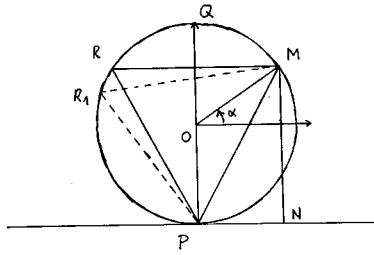
Para terminar el problema debemos determinar el máximo de

$$\cos\alpha(1 + \text{sen}\alpha)$$

cuando  $\alpha$  describe el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Consideremos los puntos

$$M(\cos\alpha, \text{sen}\alpha), \quad N(\cos\alpha, -1).$$



(En la figura, Q es el punto medio de RM)  
Entonces se tiene :

$$Area(MNPQ) = QM \cdot QP = \cos \alpha \cdot (1 + \operatorname{sen} \alpha).$$

Observamos que el área del rectángulo MNPQ es igual al área del triángulo MPR ; luego  $\cos \alpha \cdot (1 + \operatorname{sen} \alpha)$  es máxima cuando sea máxima el área de este triángulo. Veamos que si este triángulo tiene área máxima, entonces es equilátero. En efecto, ese triángulo es isósceles (con P el ángulo "desigual"). Bastará probar que es isósceles con R el ángulo "desigual"; en efecto, si no fuera así la mediatriz del segmento PM cortaría al arco PM que contiene a R en un punto  $R_1 \neq R$ , y en ese caso el área de PMR sería menos que el área de  $PMR_1$ , lo cual es imposible.

Por consiguiente,

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

y el área de  $AM_1M_2$  es menor o igual que  $R_1R_2 \frac{3\sqrt{3}}{4}$ .

El caso de igualdad se verifica si y solamente si

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{6} \text{ y } \operatorname{sen}(2\alpha_1 + \alpha_2) = 1,$$

luego  $2\alpha_1 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ , es decir  $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$ . ■

## Ejemplo 2

a) Demostrar que para todo número natural  $n$  se verifica

$$(1^5 + 2^5 + \dots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \dots + n^7) = 2 \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^4$$

b) Utilizando la desigualdad de las medias, determinar el valor mínimo de la expresión

$$\frac{n^3(n+1)^4}{\sqrt[4]{(n!)^6}}$$

cuando  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Solución

a) Lo probaremos por inducción. Para  $n = 1$ , la igualdad es cierta.

Supongámosla cierta para  $n$ . Pongamos

$$A = \sum_{k=1}^n k^5 + (n+1)^5 + \sum_{k=1}^n k^7 + (n+1)^7,$$

se tiene entonces, por la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}
A &= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4 + (n+1)^5 + (n+1)^7 \\
&= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4 + (n+1)^5(1+(n+1)^2) \\
&= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4 + (n+1)^5(n^2+2n+2) \\
&= (n+1)^4\left(\frac{n^4}{8} + (n+1)(n^2+2n+2)\right) \\
&= \frac{(n+1)^4}{8}(n^4+8n^3+24n^2+32n+16) \\
&= \frac{(n+1)^4}{8}(n+2)^4 \\
&= 2\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^4,
\end{aligned}$$

que es lo que había que probar.

b) La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica da

$$\begin{aligned}
2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^4 &\geq 2n\sqrt[2]{(1^5 \times 2^5 \times \dots \times n^5) \times (1^7 \times 2^7 \times \dots \times n^7)} = \\
&= 2n\sqrt[2]{(n!)^{12}} = 2n\sqrt{(n!)^6},
\end{aligned}$$

luego

$$\frac{n^3(n+1)^4}{\sqrt{(n!)^6}} \geq 2^4 = 16.$$

Por lo tanto, el mínimo buscado es 16, que se alcanza para  $n = 1$ . ■

### Ejemplo 3

Sea  $n$  un entero mayor o igual que 2; sin utilizar la derivación, hallar el máximo de

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{sen}^2(x_i - x_j),$$

cuando los números  $x_1, \dots, x_n$  varían en  $\mathbb{R}$ .

**Solución**

Se tiene :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{sen}^2(x_i - x_j) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (1 - \cos^2(x_i - x_j)) = \\
&= \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos^2(x_i - x_j) \quad (1)
\end{aligned}$$

y, por otra parte,

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos^2(x_i - x_j) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} (1 + \cos 2(x_i - x_j)) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{n(n-1)}{2} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos 2(x_i - x_j) \right) \quad (2)\end{aligned}$$

Puesto que

$$\left( \sum_{i=1}^n \cos 2x_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \operatorname{sen} 2x_i \right)^2 = n + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos 2(x_i - x_j) \geq 0,$$

entonces

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos 2(x_i - x_j) \geq -\frac{n}{2} \quad (3).$$

Como consecuencia de (2), (3) se transforma en

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos^2(x_i - x_j) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{2} \right) = \frac{n(n-2)}{4} \quad (4).$$

Y de (1) y (4) se deduce

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{sen}^2(x_i - x_j) \leq \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-2)}{4}.$$

Así tenemos que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{sen}^2(x_i - x_j) \leq \frac{n^2}{4} \quad (5).$$

Probemos que  $\frac{n^2}{4}$  es el máximo buscado.

Observemos que hay igualdad en (5) si y solamente si (3) es una igualdad, lo que equivale a

$$\sum_{i=1}^n \cos 2x_i = \sum_{i=1}^n \operatorname{sen} 2x_i = 0.$$

Si  $n$  es par ( $= 2k$ ), basta tomar

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = \cdots = x_k = \frac{\pi}{4} \\ x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_{2k} = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Si  $n = 2k + 1$ , escogemos los números reales  $x_1, \dots, x_n$  tales que

$$\begin{cases} x_{2i+1} = -x_{2i+2}, & 0 \leq i \leq k-1 \\ x_{2k+1} = 0 \end{cases}$$

con lo que se tiene

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{sen} 2x_i = 0,$$

y

$$\sum_{i=1}^n \cos 2x_i = 2 \sum_{i=0}^{k-1} \cos 2x_{2i+1} + 1 = 2k \cos 2x_1 + 1.$$

Entonces, para que sea

$$\sum_{i=1}^n \cos 2x_i = 0,$$

es suficiente tomar

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{Arc cos} \left( -\frac{1}{2k} \right).$$

Luego, en efecto,  $\frac{n^2}{4}$  es el máximo buscado. ■

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/>

Edita:

