Problema 142, propuesto por Jose Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Sean a, b, c tres números positivos distintos de suma 1. Demostrar que

$$\frac{(a+bc)bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b+ca)ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{(c+ab)ab}{(c-a)(c-b)}<\frac{1}{3}.$$

En primer lugar, hacemos

$$\sum_{\text{cíclica}}\frac{(a+bc)bc}{(a-b)(a-c)}=\sum_{\text{cíclica}}\frac{(a+bc)bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{\sum_{\text{cíclica}}(a+bc)bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\text{cíclica}} bc(a+bc)(c-b)\\ =&\sum_{\text{cíclica}} abc(c-b)+\sum_{\text{cíclica}} b^2c^2(c-b)\\ =&abc\underbrace{\sum_{\text{cíclica}}(c-b)}_{=0}+\left(b^2c^3-b^3c^2+c^2a^3-c^3a^2+a^2b^3-a^3b^2\right).\end{aligned}$$

La expresión $\lambda=b^2c^3-b^3c^2+c^2a^3-c^3a^2+a^2b^3-a^3b^2$ se anula cuando alguna de las variables a, b, c son iguales, por lo que $(a-b)(b-c)(c-a)=ca^2-ba^2+ab^2-cb^2+bc^2-ac^2$ debe dividir a λ. Mediante una división comprobamos que $\lambda=(a-b)(b-c)(c-a)(bc+ca+ab)$ y por tanto

$$\sum_{\text{cíclica}}\frac{(a+bc)bc}{(a-b)(a-c)}=bc+ca+ab.$$

Ahora, teniendo en cuenta la identidad

$$(1-a)(1-b)(1-c)=1-(a+b+c)+(bc+ca+ab)-abc,$$

resulta que, usando la desigualdad $\sqrt[3]{xyz}\leq\frac{x+y+z}{3}$ (desigualdad entre las medias aritmética y geométrica)

$$\begin{aligned}bc+ca+ab=&(1-a)(1-b)(1-c)+((a+b+c)-1)+abc\\ &\leqslant\left(\frac{3-(a+b+c)}{3}\right)^3+0+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{8}{27}+\frac{1}{27}=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI