Problema 144, propuesto por Vicente Vicario García, Huelva, España.

Dados los números α y β siguientes, probar o refutar que $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned}\alpha =& \sqrt{13} + \sqrt{10 + 2\sqrt{13}}\\ \beta =& \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{18 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{65 - 26\sqrt{3}}}\end{aligned}$$

Solución de Francisco Javier García Capitán. En primer lugar,

$$\left(\alpha - \sqrt{13}\right)^2 = 10 + 2\sqrt{13} \Rightarrow \alpha^2 - 2\sqrt{13}\alpha + 13 = 10 + 2\sqrt{13} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + 3}{2 + 2\alpha} = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{\alpha^4 + 6\alpha^2 + 9}{4\alpha^2 + 8\alpha + 4} = 13 \Rightarrow \alpha^4 - 46\alpha^2 - 104\alpha - 43 = 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}&\left(\beta - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right)^2 = 18 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{65 - 26\sqrt{3}},\\ &\beta^2 + 5 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\beta = 18 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{65 - 26\sqrt{3}},\\ &\beta^2 + 4\sqrt{3} - 13 = 2\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\beta + \sqrt{65 - 26\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado, y tendiendo en cuenta que

$$\sqrt{65 - 26\sqrt{3}}\sqrt{5 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{13}\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}\sqrt{5 + 2\sqrt{3}} = 13,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}&\beta^4 + 48 + 169 - 26\beta^2 + 8\sqrt{3}\beta^2 - 104\sqrt{3} = 4\left(5\beta^2 + 2\sqrt{3}\beta^2 + 65 - 26\sqrt{3} + 26\beta\right),\\ &\beta^4 + 48 + 169 - 26\beta^2 + 8\sqrt{3}\beta^2 - 104\sqrt{3} = 20\beta^2 + 8\sqrt{3}\beta^2 + 260 - 104\sqrt{3} + 104\beta,\\ &\beta^4 - 46\beta^2 - 104\beta - 43 = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, α y β son dos soluciones positivas del polinomio

$$P(x) = x^4 - 46x^2 - 104x - 43.$$

Pero, según la regla de los signos de Descartes, al haber sólo un cambio de signo en los coeficientes de $P(x)$, dicho polinomio tiene a lo máximo una raíz positiva. Entonces, debe ser $\alpha = \beta$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI