Problemas de nivel medio y de Olimpiadas 31

Algunos problemas búlgaros

BUL1. Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC. Probar que los puntos medios de AB, CH y el punto de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos $\widehat{CAH}$ y $\widehat{CBH}$ están alineados. (*Danyo Danev)*

BUL2. Sean $\alpha \neq \beta$ las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$. Para cada entero positivo n ponemos

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

a) Hallar todos los p y q tales que

$$a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+3} = (-1)^n \text{ para todo } n \geq 1.$$

b) Probar que para esos p y q, se verifica $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ para cualquier $n \geq 1$, y si 3 divide a n, entonces a_n es un número par. (*Lyubomir Davidov).*

BUL3.Hallar todos los números reales x tales que

$$\tan\left(\frac{\pi}{12} - x\right), \tan\left(\frac{\pi}{12}\right), \tan\left(\frac{\pi}{12} + x\right)$$

formen (en algún orden) una progresión geométrica. (*Nikolai Nikolov, Vesselin Drensky)*

BUL4. Hallar todos los números reales m tales que la ecuación

$$\left(x^2 - 2mx - 4\left(m^2 + 1\right)\right)\left(x^2 - 4x - 2m\left(m^2 + 1\right)\right) = 0$$

tiene exactamente tres raíces reales distintas. (*Ivan Landgev)*

BUL5. Sea F un punto de la base AB del trapecio $ABCD$ tal que $DF = CF$; sea $E = AC \cap BD$; y O_1, O_2 loscircuncentros de los triángulos ADF y FBC, respectivamente. Demostrar que $FE \perp O_1O_2$.(Nikolai Nikolov)

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI