Problema 148, Propuesto por Luis Gómez Sánchez Alfaro, Universidad de Oriente, Venezuela.

Sea c un número natural mayor que 2. ¿Cuántos triángulos de lados enteros a, b, c existen tales que $a \leqslant b \leqslant c$?

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Sea $f(c)$ el número triángulos de lados enteros a, b, c existen tales que $a \leqslant b \leqslant c$. Para que los números a, b y c correspondan a los lados de un triángulo deben ser $a < b+c$, $b < c+a$ y $c < a+b$. Pero la condición $a \leqslant b \leqslant c$ asegura que $a < b + c$ y $b < c + a$, por lo que sólo debemos contemplar la condición $c < a+b$. Así, cuando a varía desde 1 hasta c, b puede variar desde $\max(a, c-a+1)$ hasta c. Teniendo en cuenta que

$$\max(a, c-a+1) = \begin{cases} c-a+1 & \text{si } a \leqslant \frac{c+1}{2} \\ a & \text{si } a \geqslant \frac{c+1}{2} \end{cases},$$

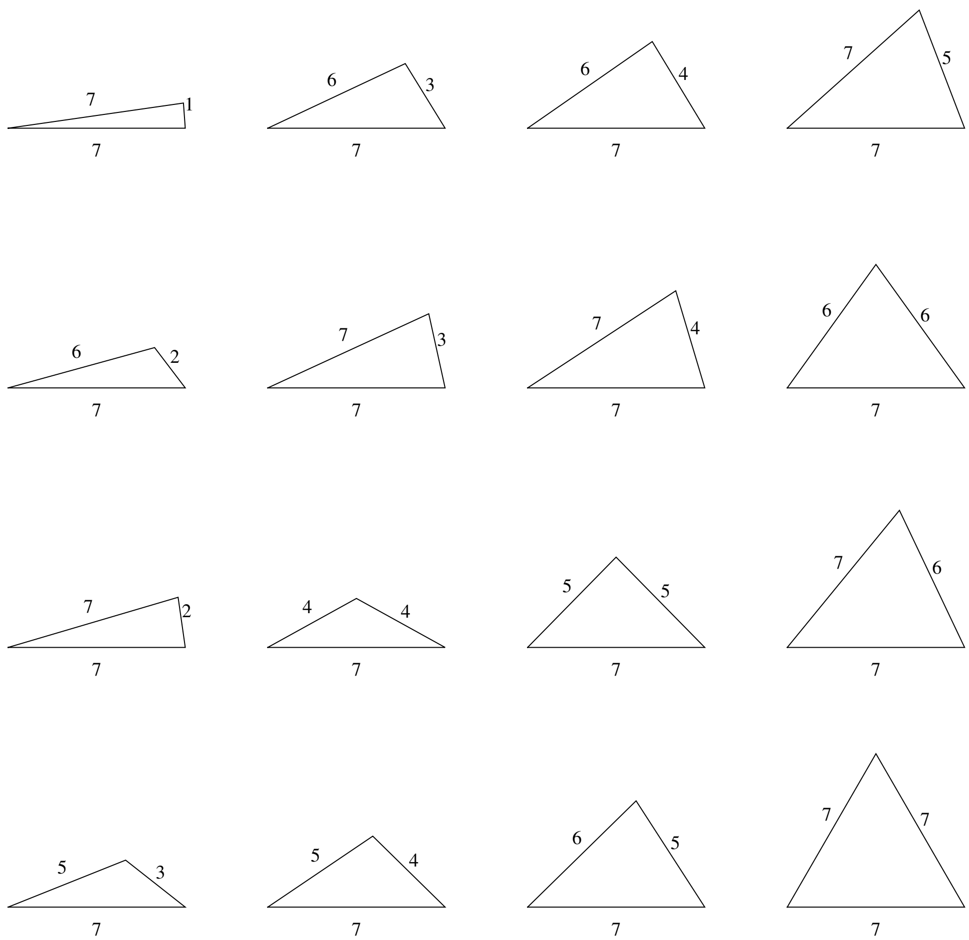
podemos expresar, cuando c es impar,

$$\begin{aligned} f(c) &= \sum_{a=1}^{(c+1)/2} \left(\sum_{b=c-a+1}^{c} 1 \right) + \sum_{a=1+(c+1)/2}^{c} \left(\sum_{b=a}^{c} 1 \right) \\ &= \sum_{a=1}^{(c+1)/2} a + \sum_{a=1+(c+1)/2}^{c} (c-a+1) \\ &= \frac{1+\frac{c+1}{2}}{2} \cdot \frac{c+1}{2} + \frac{\frac{c-1}{2}+1}{2} \cdot \frac{c-1}{2} \\ &= \frac{(c+1)^2}{4}, \end{aligned}$$

y cuando c es par

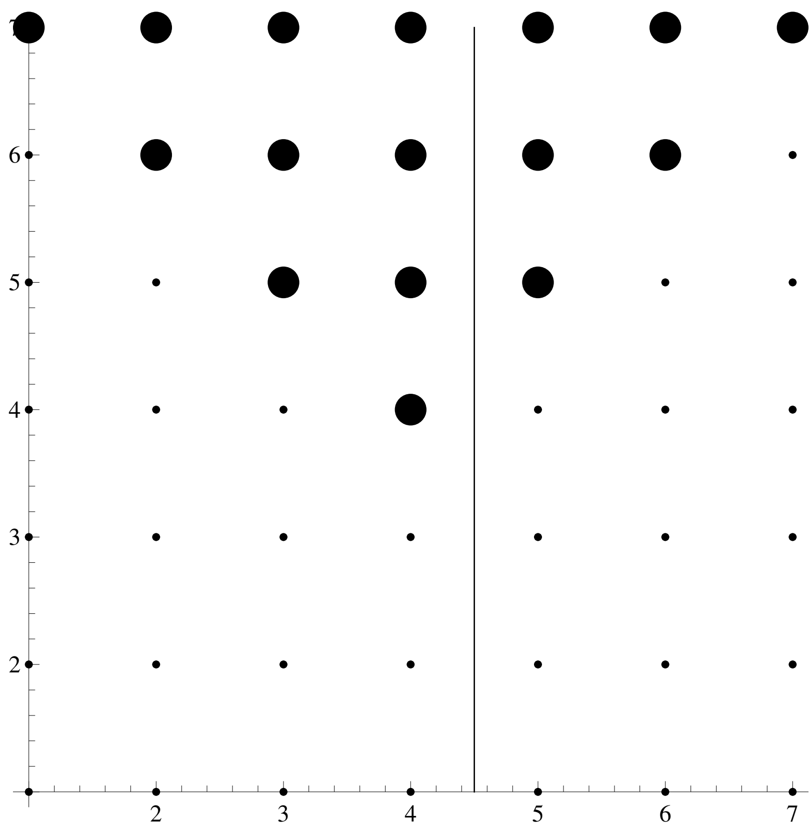
$$\begin{aligned} f(c) &= \sum_{a=1}^{c/2} \left(\sum_{b=c-a+1}^{c} 1 \right) + \sum_{a=1+c/2}^{c} \left(\sum_{b=a}^{c} 1 \right) \\ &= \sum_{a=1}^{c/2} a + \sum_{a=1+c/2}^{c} (c-a+1) \\ &= \frac{1+\frac{c}{2}}{2} \cdot \frac{c}{2} + \frac{\frac{c}{2}+1}{2} \cdot \frac{c}{2} \\ &= \frac{c(c+2)}{4}. \end{aligned}$$

A continuación vemos los $f(7) = \dfrac{(7+1)^2}{4} = 16$ triángulos con $c = 7$ y una demostración sin palabras para este valor de c.



En esta figura vemos una demostración sin palabras del valor de $f(c)$, representado por el número de puntos gordos, para el valor de $c = 7$:

$$\sum_{a=1}^{\frac{c+1}{2}} \sum_{b=-a+c+1}^{c} 1 \qquad\qquad \sum_{a=\frac{c+1}{2}+1}^{c} \sum_{b=a}^{c} 1$$



Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: