GEOMETRÍA DEL TETRAEDRO
Francisco Bellot Rosado

1. Bibliografía

Valeri V. Vavilov : Geometría del tetraedro (manuscrito privado)

Nathan Altshiller Court : Modern Pure Solid Geometry, Chelsea 1964.

Dan Branzei, Sebastian Anita, Constantin Cocea : Planul si spatiul euclidean (en rumano), Ed. Academiei, Bucarest 1986.

Mihai Miculita, Dan Branzei : Analogii Triunghi-tetraedru (en rumano), Editura Paralela 45, Pitesti, 2000.

Dan Branzei : Notes on Geometry, Ed. Paralela 45, Pitesti 1999.

Georgi Pascalev, Ivan Chovanov : Puntos notables del tetraedro (en búlgaro), Narodna Prosveta, Sofia 1988.

F.Bellot : Círculos y esferas de Lucas, comunicación presentada en la Conferencia de la WFNMC, Melbourne 2002.

Y.Sortais, R. Sortais : Géométrie de l'espace et du plan, Hermann, Paris, 1988.

V.Prasolov,I.Sharigin : Zadachi po stereometrii (en ruso), Nauka, Moscú 1989.

Revistas

The Mathematical Gazette (UK):

R.T.Robinson : The tetrahedron and a twelve-points sphere; vol.XIV, no.198, January 1929, pp.296-299.

F.O'Hara : A 24-points sphere for the orthocentrical tetrahedron; vol.LVI, no.398, December 1972, pp.295-298.

Mathesis (Bélgica; desaparecida en 1962); entre 1922 y 1962 he entresacado 22 referencias sobre el tetraedro, pero hay bastantes más.

G.Cairns,M.McIntyre,J.Strantzen : Geometric Proofs of some recent results of Yang Lu, Mathematics Magazine, vol.66,n^{o}4, oct.1993,p.263-265.

2.Introducción

La geometría del triángulo, hoy prácticamente en grave peligro de extinción, tiene su continuación natural en el espacio tridimensional en el estudio de las propiedades del poliedro más simple, el tetraedro. El hecho de que los mecanismos articulados sean objetos tridimensionales me sugirió la idea de desarrollar algunas propiedades del tetraedro, que espero no sean del todo conocidas. Algunas de ellas serán la generalización de las correspondientes del triángulo, pero hay otras bastante diferentes.

En lo que sigue, ABCD será un tetraedro, de aristas

$$BC = a, CA = b, AB = c, DA = a', DB = b', DC = c'.$$

BC y DA son aristas opuestas; lo mismo que CA y DB, AB y DC.

El ángulo diedro de arista AB se denotará $\widehat{AB}$.

El ángulo triedro de vértice A se denotará, cuando no haya lugar a confusión, por $\widehat{A}$.

El área de la cara ABC se denotará por $S_{ABC} = S_D$.

El plano BCD, es decir, la cara opuesta al vértice A, se denotará por A^f.

Algunas definiciones :

Mediana : une un vértice con el baricentro de la cara opuesta.

Bimediana : une los puntos medios de dos aristas opuestas.

Bialtura: es la perpendicular común a dos aristas opuestas.

Altura: es la perpendicular trazada desde un vértice a la cara opuesta.

Bisectriz : es la intersección de dos planos bisectores de diedros que tienen una cara común.

Un primer resultado que se diferencia del caso del triángulo es que, en general, las alturas de un tetraedro no se intersecan en un punto.

Cuando las alturas no son concurrentes, son las generatrices de un hiperboloide alabeado.

Tetraedros especiales : por las propiedades de las caras

Tetraedro *isofacial* : es la pirámide triangular regular ; una cara es un triángulo equilátero y las otras tres son triángulos isósceles.

Tetraedro *equifacial :* las caras son triángulos de la misma área; esto equivale a que tengan perímetros iguales y a su vez, que sean triángulos iguales.

Tetraedro *regular :* sus cuatro caras son triángulos equiláteros.

Tetraedro *trirrectángulo :* tres de sus caras son triángulos rectángulos con un vértice común.

Por las aristas :

Tetraedro *equifacial :* sus aristas opuestas son iguales.

Tetraedro *ortocéntrico :* Las sumas de los cuadrados de aristas opuestas son iguales.

Tetraedro de Crelle (o *esqueleto,* según la tradición escolar rusa) : las sumas de aristas opuestas son iguales.

Tetraedro *isodinámico :* Los productos de aristas opuestas son iguales.

Algunas propiedades generales del tetraedro.

- Las bimedianas concurren en el centro de gravedad G del tetraedro, que es el punto medio de cada bimediana.Las medianas también son concurrentes en este punto.

Si llamamos G_i al baricentro de la cara opuesta al vértice A_i, se verifica la relación -teorema de Federigo Commandino (1509-1575); el teorema es de 1565, y la obra *De centro gravitatis solidorum* - según Altshiller Court, donde se dan dos demostraciones del resultado:

$$\frac{\overline{GA_i}}{\overline{GG_i}} = -3.$$

(Demostración en Miculita, pg.60-61, utilizando la relación de van Aubel en tetraedros)

- Las longitudes de las medianas y bimedianas de un tetraedro están dadas por las fórmulas siguientes: para las medianas

$$m_i = \frac{3\left(a_{ij}^2 + a_{ih}^2 + a_{ik}^2\right) - \left(a_{jh}^2 + a_{jk}^2 + a_{hk}^2\right)}{9}, \{i,j,h,k\} = \{1,2,3,4\}$$

y además se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 &= \frac{1}{3}\left(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2\right) \\ GA_1^2 + GA_2^2 + GA_3^2 + GA_4^2 &= \frac{3}{4}\left(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2\right) \end{aligned}$$

La suma de las longitudes de las medianas está comprendida entre los 4/9 y los 2/3 de la suma de las longitudes de las aristas del tetraedro.

Por su parte, la longitud de la bimediana está dada por

$$m_{ij}^2 = \frac{\left(a_{ih}^2 + a_{ik}^2 + a_{jh}^2 + a_{jk}^2\right) - \left(a_{ij}^2 + a_{hk}^2\right)}{4}, \quad \{i,j,h,k\} = \{1,2,3,4\}.$$

Y se tiene

$$m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{14}^2 = \frac{1}{4}\left(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2\right).$$

Además, la suma de las longitudes de las bimedianas está comprendida entre la cuarta parte y la mitad de la suma de las longitudes de las aristas del tetraedro.

- La siguiente relación entre las longitudes de las alturas y de las bialturas en un tetraedro aparece en Mathematics Magazine (1993) y sus autores aseguran no haberla encontrado citada antes en la literatura :

Si h_i son las cuatro alturas y b_i las tres bialturas, se verifica

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2} = \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + \frac{1}{b_3^2}.$$

Bastante sorprendentemente, la demostración es fácil con cálculo vectorial; pero el resultado no es nuevo: es un ejercicio resuelto en la colección de problemas (en ruso : *Zadachi po stereometrii) de Prasolov y Sharigin,* 1989.

- El punto de Monge del tetraedro : Los planos trazados por los puntos medios de las aristas, perpendiculares a las aristas opuestas, concurren en un punto, que es simétrico del centro de la esfera circunscrita respecto del centro de gravedad. Este es el punto de Monge o *anticentro* del tetraedro, y esos planos son los planos *antimediadores* del tetraedro.(G.Monge, 1811).El punto de Monge es el centro del hiperboloide alabeado del que son generatrices las alturas no concurrentes en un tetraedro no ortocéntrico.

Esferas asociadas a un tetraedro

- La esfera circunscrita. Pasa por los cuatro vértices del tetraedro; su centro O es la intersección de los planos mediadores de las seis aristas.

En la bibliografía a mi alcance, en los libros de Miculita y Branzei se da una fórmula para calcular su radio R. Es una aplicación muy elegante de la inversión en el espacio, obtenida independientemente por Crelle y Staudt. En la revista *Nouvelles Annales de mathématiques, 1874,* aparece una expresión para el radio, en función de las longitudes de las aristas (G.Dostor).

Usaremos la notación especial siguiente : Tetraedro $A_1A_2A_3A_4$, de aristas A_iA_j; en particular nos interesarán

$$a_i = A_iA_4$$

y si B_i son puntos situados en A_4A_i, consideraremos B_iA_4.

Entonces utilizaremos un resultado de proporcionalidad conocido:

$$\frac{v(A_1A_2A_3A_4)}{v(B_1B_2B_3A_4)} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{B_1A_4 \cdot B_2A_4 \cdot B_3A_4},$$

con las notaciones anteriores (aquí, $v(...)$ es el volumen).

Entonces vamos a demostrar el siguiente resultado :

Dado el tetraedro $(A) = A_1A_2A_3A_4$, de aristas $a_{ij} = A_iA_j$, volumen V, radio de la esfera circunscrita R, existe un triángulo $(B) = B_1B_2B_3$ cuyos lados respectivamente opuestos a $B_{1,}B_2, B_3$ son

$$a_{23} \cdot a_{14}, \quad a_{13} \cdot a_{24}, \quad a_{12} \cdot a_{34}.$$

En efecto, consideremos la inversión de polo A_4 y potencia

$$k = a_{14} \cdot a_{24} \cdot a_{34};$$

esta inversión transforma la esfera circunscrita(de centro O) al tetraedro (A) en un plano π perpendicular a OA_4,y a una distancia de A_4 igual a

$$d = \frac{k}{2R} = \frac{a_{14} \cdot a_{24} \cdot a_{34}}{2R};$$

el transformado de O es un punto $P \in \pi$, y los transformados de A_1, A_2, A_3 son B_1, B_2, B_3, respectivamente. Por la astuta forma de definir la inversión, se tiene

$$\overline{A_4A_i} \cdot \overline{A_4B_i} = k = a_{14} \cdot a_{24} \cdot a_{34},$$

y de aquí obtenemos

$$A_4B_1 = a_{24} \cdot a_{34}, \quad A_4B_2 = a_{14} \cdot a_{34}, \quad A_4B_3 = a_{14} \cdot a_{24}.$$

y podemos escribir

$$\frac{A_4A_i}{A_4B_j} = \frac{A_4A_j}{A_4B_i}, i \neq j.$$

Los triángulos $A_4A_iA_j$ y $A_4B_iB_j$ son semejantes (la restricción de la inversión al plano de esos triángulos es una inversión plana) y podemos completar las razones anteriores con los terceros lados :

$$\frac{A_4A_i}{A_4B_j} = \frac{A_4A_j}{A_4B_i} = \frac{A_iA_j}{B_iB_j}, i \neq j$$

y la segunda de las proporciones nos permite encontrar las longitudes de los lados del triángulo $B_1B_2B_3$:

$$\begin{aligned} B_2B_3 &= \frac{a_{23} \cdot a_{14} \cdot a_{34}}{a_{34}} = a_{14} \cdot a_{23} = b_1 \\ B_1B_2 &= a_{12} \cdot a_{34} = b_3 \\ B_1B_3 &= a_{13} \cdot a_{24} = b_2 \end{aligned}$$

que es lo anunciado.

Ahora estamos en condiciones de calcular el radio R. Llamando t al semiperímetro de (B), se tiene, por una parte,

$$S\left(B_1B_2B_3\right) = \sqrt{t\left(t-b_1\right)\left(t-b_2\right)\left(t-b_3\right)};$$

y

$$\begin{aligned} v(B_1B_2B_3A_4) &= \frac{1}{3} S\left(B_1B_2B_3\right) \cdot A_4P = \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{t\left(t-b_1\right)\left(t-b_2\right)\left(t-b_3\right)} \cdot \frac{a_{14} \cdot a_{24} \cdot a_{34}}{2R}; \end{aligned}$$

pero la relación entre los volúmenes de los dos tetraedros da

$$\frac{v(A_1A_2A_3A_4)}{v(B_1B_2B_3A_4)} = \frac{a_{14} \cdot a_{24} \cdot a_{34}}{B_1A_4 \cdot B_2A_4 \cdot B_3A_4} = \frac{1}{a_{14} \cdot a_{24} \cdot a_{34}},$$

así que finalmente se obtiene

$$R = \frac{\sqrt{t\left(t-b_1\right)\left(t-b_2\right)\left(t-b_3\right)}}{6V}.$$

(*como los lados del triángulo (B) se expresan como producto de dos aristas de (A), el radicando es de dimensión 8, y su raíz cuadrada de dimensión 4, mientras que el denominador (el volumen) es de dimensión 3; la fórmula anterior es dimensionalmente correcta).*

La fórmula que acabamos de obtener es la generalización de la correspondiente al triángulo:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

- El radio de la esfera inscrita en un tetraedro vale

$$r = \frac{3V}{S_A + S_B + S_C + S_D};$$

generalización de la correpondiente fórmula para los triángulos

$$r = \frac{S}{p};$$

como es sabido, un triángulo tiene 4 círculos tritangentes, el círculo inscrito y los tres círculos exinscritos; en el caso del tetraedro, el problema de la determinación de las esferas cuadritangentes, es decir, tangentes a los cuatro planos de las caras del tetraedro, tiene como máximo 8 soluciones; además de la esfera inscrita se tienen las esferas exinscritas a las caras A^i, de radios

$$r_i = \frac{3V}{S_j + S_h + S_k - S_i}, \{i, j, h, k\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

y las esferas exinscritas a las caras $A^i y A^j$, de radios

$$r_{ij} = \frac{3V}{S_h + S_k - S_i - S_j}; \{i, j, h, k\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

En este último caso, para que exista esfera exinscrita a las caras $A^i y A^j$ tiene que verificarse la condición $S_h + S_k - S_i - S_j > 0$.

En relación con las esferas tangentes a los planos del tetraedro, se verifica el siguiente resultado : (Branzei-Anita-Cocea, pg.148)

En el tetraedro ABCD

a)Existen a lo sumo 8 esferas tangentes a los planos A^f, B^f, C^f, D^f.

b)Existen siete esferas tangentes a esos planos si y sólo si existen dos parejas de caras distintas que tienen igual la suma de sus áreas.

c)Existen seis esferas tangentes a los planos si y sólo si de las cuatro áreas de las caras, dos a dos son iguales.

d)Existen cinco esferas tangentes a los planos si y solo si el tetraedro es equifacial.

- La distancia entre el baricentro del tetraedro y el centro de la esfera circunscrita está dada por

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{16}\left(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2\right)$$

- Mientras en el triángulo existe una relación bien conocida (el teorema de Euler) que relaciona la distancia entre el circuncentro y el incentro con los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita (a saber, $IO^2 = R\,(R-2r)$), en el tetraedro no ocurre lo mismo, salvo que se impongan condiciones especiales; en *Mathesis, 1924, p.256, Cl. Servais* demostraba que, en general, no existe tal relación, refutando la afirmación hecha un siglo antes por Durrande. Cuando el tetraedro es tal que A, I, O están alineados, entonces

$$IO^2 = (R+r)\,(R-3r)\,.$$

Observación : Durrande es el descubridor de una relación entre la distancia de I a O y los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un cuadrilátero bicéntrico, es decir, que admite un círculo inscrito y uno circunscrito; tal relación es la siguiente:

$$d^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2},$$

que se puede escribir también como (teorema de Fuss)

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2},$$

que generaliza la correspondiente al triángulo, y que es probablemente de Euler :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d}.$$

Otras esferas relacionadas con el tetraedro

Análogas al círculo de los 9 puntos

- La esfera de los doce puntos. Pasa por los centros de gravedad de las caras (4), por los puntos situados a 1/3 de las distancias del punto de Monge a los vértices(4) y por las proyecciones de esos puntos sobre las caras correpondientes(4). Su radio es $R/3$; su centro E (de Euler) es el transformado de O en la homotecia de centro G y razón 1/3.

Los puntos O,G,E y M (de Monge) forman una cuaterna armónica en la recta de Euler del tetraedro.

- La esfera (O'')de los diez y seis puntos. Pasa por las proyecciones del circuncentro O sobre las caras del tetraedro, O_a, O_b, O_c, O_d. Estos cuatro puntos son los centros de los circuncírculos de las caras. Consideremos las cuatro esferas que tienen esos circuncírculos como secciones diametrales. El centro radical O' de estas cuatro esferas es el punto isogonal de O con respecto al tetraedro. Luego las proyecciones de O' sobre las caras del tetraedro están en la esfera (O''). Los puntos simétricos, con respecto a O'', de las 8 proyecciones de O y O' sobre las caras del tetraedro, están en (O'').

Cuando se consideran tetraedros especiales, se definen otras esferas. Lo iremos viendo en cada caso.

Extensión al tetraedro de los puntos isogonales. Teorema de Steiner

Definición.-Los planos (PA_iA_j) y (QA_iA_j) son isogonales respecto al diedro de arista a_{ij} en el tetraedro $(A) = A_1A_2A_3A_4$ cuando son simétricos respecto del plano bisector de este diedro.

Esos planos son isogonales si y sólo si forman, con los planos (A^h) y (A^k), respectivamente, diedros congruentes, para $\{i, j, h, k\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Llamando P_i, Q_i a las proyecciones de los puntos P y Q sobre el plano (A^i), se verifica la proposición :

Teorema : Los planos (PA_iA_j) y (QA_iA_j) son isogonales si y sólo si

$$PP_h \cdot QQ_h = PP_k \cdot QQ_k.$$

Teorema de Steiner

Se considera un tetraedro ABCD y los puntos E y F sobre la recta AD. La condición necesaria y suficiente para que los planos (BCE) (BCF) sean isogonales es que se verifique la relación siguiente :

$$EA \cdot FA \cdot (S_A)^2 = ED \cdot FD \cdot (S_D)^2$$

Este teorema extiende al espacio la relación de Steiner sobre puntos isogonales en el triángulo, y al mismo tiempo generaliza el teorema del plano bisector, de Gergonne, que dice que el plano bisector de un diedro en el tetraedro ABCD divide a la arista opuesta en la razón de las áreas de las caras que forman el diedro; a su vez, este resultado generaliza el teorema de la bisectriz en un triángulo.

También se verifica el resultado siguiente :

Teorema : Si (A) es un tetraedro y P es un punto arbitrario,distinto de los vértices, entonces los isogonales de los planos (PA_iA_j) respecto de los diedros de aristas a_{ij} del tetraedro (A) son concurrentes en un punto Q.

P y Q son isogonales conjugados, extensión al tetraedro del correpondiente concepto en el triángulo.

Una definición alternativa del isogonal de un punto interior a un tetraedro está dada en el siguiente resultado (Branzei-Anita-Cocea, p. 176):

Teorema : Sea ABCD un tetraedro y M un punto interior. Existe un único punto M', tal que, para toda permutación (X,Y,Z,U) de los vértices (A,B,C,D), se verifican las siguientes igualdades de ángulos diedros:

$$M\left(\widehat{XY}\right)Z = U\left(\widehat{XY}\right)M'; \quad M\left(\widehat{XY}\right)U = Z\left(\widehat{XY}\right)M'.$$

Los puntos M y M' se llaman isogonales con respecto al tetraedro dado.

El punto de L'Huillier (o primer punto de Lemoine) del tetraedro

Sea ABCD un tetraedro.

Existe un punto K interior al tetraedro, tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a las caras del tetraedro es mínima. K se llama *punto de L'Huillier o primer punto de Lemoine.*

K es el isogonal del centro de gravedad del tetraedro.

Si $(BCK) \cap AD = E$, entonces se verifica

$$AE \cdot (S_A)^2 = ED \cdot (S_D)^2 .$$

Este resultado generaliza al tetraedro el teorema de Lemoine para el triángulo; el punto de Lemoine del triángulo es el de concurrencia de las simedianas, es decir, las rectas simétricas de las medianas respecto de las bisectrices. Cada simediana divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los cuadrados de los lados adyacentes.

- Las 8 proyecciones, sobre las caras de un tetraedro, de dos puntos isogonales, están en una esfera cuyo centro es el punto medio del segmento determinado por los puntos isogonales. Esta es la *esfera de los 8 puntos.*

- El conjunto de puntos del espacio cuyo isogonal respecto de un tetraedro no está determinado es una superficie (llamada superficie de Sartiaux del tetraedro) cuya ecuación en coordenadas baricéntricas es

$$\frac{S_1^2}{x_1} + \frac{S_2^2}{x_2} + \frac{S_3^2}{x_3} + \frac{S_4^2}{x_4} = 0,$$

y en coordenadas normales (proporcionales a las distancias del punto a las caras del tetraedro),

$$\frac{S_1}{x_1} + \frac{S_2}{x_2} + \frac{S_3}{x_3} + \frac{S_4}{x_4} = 0.$$

En el caso del triángulo, ese lugar geométrico es el círculo circunscrito.La generalización al tetraedro del teorema de Simson para el triángulo es la siguiente :

Las proyecciones de un punto del espacio sobre los planos de las caras de un tetraedro son puntos coplanarios si y sólo si el punto pertenece a la superficie de Sartiaux del tetraedro, y ese plano se llama *plano de Simson* del tetraedro.

A.Sartiaux definió esta superficie en un problema publicado en *Nouvelles Annales de Mathématiques, 1866,* cuando era alumno de l'École Polytechnique.El problema es una generalización de otro publicado por Beltrami en la misma revista, y dice lo siguiente:

Los puntos que dividen a los 28 segmentos que unen dos a dos los centros de las 8 esferas inscritas en un tetraedro cualquiera en la razón de las distancias de esos centros a un plano fijo, están sobre una superficie de tercer orden que contiene a las aristas del tetraedro. (Cuando el plano fijo es el plano del infinito se tiene el problema de Beltrami)

Definición: El isogonal de un plano mediano de un tetraedro se llama *plano simediano.*

Como los planos medianos de un tetraedro concurren en el centro de gravedad, los planos simedianos concurren en un punto K, llamado *punto simediano (o primer punto de Lemoine) del tetraedro, o punto de L'Huillier.*

El punto simediano es el punto cuya suma de los cuadrados de las distancias a las caras del tetraedro es mínima.

La superficie de Sartiaux de un tetraedro es el lugar geométrico de los puntos del espacio cuyos planos polares pasan por el punto simediano del tetraedro.

El Teorema de Desargues para tetraedros

Poncelet demostró el siguiente resultado:

Si para los tetraedros ABCD y A'B'C'D' las rectas AA',BB',CC' y DD' son concurrentes en un punto O, y los planos correspondientes se intersecan según las rectas

$$a = A^f \cap A'^f, b = B^f \cap B'^f, c = C^f \cap C'^f, d = D^f \cap D'^f,$$

entonces las rectas a,b,c d son coplanarias.

O es el centro de la homología y el plano que contiene a las rectas es el plano de homología. Una demostración se puede encontrar en el libro de Branzei, Anita y Cocea, pg.171.

3. Tetraedro ortocéntrico

Las propiedades siguientes son equivalentes :

1.- Las alturas de un tetraedro se cortan en un punto común.

2.- $AD \perp BC, AB \perp CD$ y $AC \perp BD$.

3.- (Feuerbach, 1827)

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

4.- Las tres bimedianas son iguales.

5.- Existe una constante k tal que

$$DA \cdot DB \cdot \cos \widehat{ADB} = DB \cdot DC \cdot \cos \widehat{BDC} = DC \cdot DA \cdot \cos \widehat{CDA} = k$$

6.- (Vecten, 1817) La proyección ortogonal de cada vértice sobre la cara opuesta es el ortocentro de dicha cara.

El esquema de la demostración es el siguiente :

$$\begin{aligned} (1) &\iff (5) \iff (2) \iff (3) \\ (2) &\iff (6) \end{aligned}$$

Otras propiedades de los tetraedros ortocéntricos

a) Si ABCD es ortocéntrico, al menos una de sus caras es un triángulo acutángulo.

b) Si ABCD es ortocéntrico, de ortocentro H, baricentro G y centro de la esfera circunscrita O, entonces : i) G es el punto medio de OH (es decir, H coincide con el punto de Monge). ii) Las perpendiculares a las caras trazadas por sus respectivos centros de gravedad se cortan en un punto Γ, alineado con G y H y tal que $H\Gamma = 2 \cdot \Gamma O$.

c) Si ABCD es ortocéntrico, existe una esfera Σ_2 que contiene a los ortocentros y baricentros de las caras.Esta es la llamada *Segunda esfera de los 12 puntos de un tetraedro ortocéntrico.* El centro de esta esfera es un punto Ω de la recta de Euler OH, y su radio es 1/3 del radio R de la esfera circunscrita. Σ_2 divide a los segmentos HA,HB,HC,HD en la proporción 1:2 (Jacobi, 1834)

La *primera esfera de los 12 puntos del tetraedro ortocéntrico* pasa por los puntos medios de las aristas y por los pies de las bialturas.

d) Si ABCD es ortocéntrico, los productos de aristas opuestas son inversamente proporcionales a las distancias entre las rectas que las contienen.

e) Si ABCD es ortocéntrico,

$$AB^2 \cdot CD^2 + AC^2 \cdot BD^2 + AD^2 \cdot BC^2 = 4\left(S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2\right).$$

f) $OH = \frac{1}{2}(OA + OB + OC + OD)$

g)Los puntos medios de las aristas de un tetraedro ortocéntrico están en una esfera de centro G y radio $\frac{1}{4}\sqrt{AB^2 + CD^2}$, llamada esfera de Vogt, o *esfera de los 24 puntos del tetraedro ortocéntrico.*Esta esfera corta a las caras del tetraedro según los círculos de los 9 puntos de cada cara.Los 24 puntos son: en cada arista, los puntos medios y los pies de las alturas de cada cara (12); y los puntos medios de los segmentos BH_1, CH_1, DH_1 (siendo H_1 el ortocentro de BCD), en cada cara (12).

4.Tetraedro equifacial

El tetraedro equifacial es a los tetraedros lo que el triángulo equilátero es a los triángulos.

Las siguientes proposiciones son equivalentes :

1.- Las cuatro caras tienen la misma área
2.- Las cuatro alturas son iguales
3.- Las parejas de aristas opuestas son iguales
4.- Los cuatro ángulos triedros son iguales.
5.- Los ángulos diedros opuestos son iguales :

$$\widehat{AB} = \widehat{CD}, \widehat{AC} = \widehat{BD}, \widehat{AD} = \widehat{BC}.$$

6.- Los senos de los ángulos triedros son iguales

$$\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = \sigma_D.$$

7.- Si G, O, I son el baricentro, el centro de la esfera circunscrita y el centro de la esfera inscrita, entonces al menos dos de estos tres puntos coinciden.

Otras propiedades de los tetraedros equifaciales

El círculo de los 9 puntos de cualquier triángulo se extiende a la *esfera de los doce puntos.* Esos doce puntos son :

- 4 proyecciones ortogonales A',B',C',D' de cada vértice sobre la cara opuesta.
- 4 puntos medios de las alturas, A",B",C",D".
- 4 ortocentros de las caras H_A, H_B, H_C, H_D.

(En el caso del tetraedro ortocéntrico, los cuatro primeros y los cuatro últimos coinciden)

El centro de la esfera es G, y su radio $\sqrt{R^2 - 8r^2}$.

Si S_A, S_B, S_C, S_D son las esferas exinscritas, de radios respectivos r_a, r_b, r_c, r_d, entonces ABCD es equifacial si y sólo si $r_a = r_b = r_c = r_d$

Esto significa que en un tetraedro equifacial sólo hay cinco esferas cuadritangentes.

En un tetraedro equifacial ABCD, la esfera exinscrita S_A, de centro I_a, tiene los siguientes puntos de tangencia :

- con la cara opuesta a A, el ortocentro del triángulo BCD.
- con el plano opuesto a B, el punto E diametralmente opuesto a A en el círculo O_E circunscrito al triángulo ACD.

En un tetraedro equifacial, $O = G = I = M = E$, y recíprocamente, si dos de estos puntos coinciden, el tetraedro es equifacial.

En un tetraedro equifacial, la suma de las distancias de un punto interior a las caras del tetraedro es constante (generalización del teorema de Viviani para el triángulo equilátero).

5. Tetraedro trirrectángulo

ABCD es trirrectángulo en D si dos cualesquiera de las rectas DA,DB,DC son perpendiculares.

Un tetraedro trirrectángulo es siempre ortocéntrico.

Las propiedades de este tetraedro generalizan las propiedades métricas de los triángulos rectángulos.

Notación especial en este caso

H será el ortocentro de ABC y E la proyección ortogonal de D sobre BC. Los lados de ABC serán a,b,c.

S_A será el área de la cara opuesta a A.

Propiedades de los tetraedros trirrectángulos

Si ABCD es trirrectángulo en D,

i) $DH^{-2} = DA^{-2} + DB^{-2} + DC^{-2}$ (Generalización del teorema del cateto; el recíproco no es cierto)

ii) $\cos^2 \widehat{HDA} + \cos^2 \widehat{HDB} + \cos^2 \widehat{HDC} = 1$

iii)$\cos^2 \widehat{BC} + \cos^2 \widehat{CA} + \cos^2 \widehat{AB} = 1$

iv) $(S_{DBC})^2 = S_{ABC} \cdot S_{HBC}$ (el recíproco no es cierto)

v) (Desargues, 1699)

$$(S_A)^2 + (S_B)^2 + (S_C)^2 = (S_D)^2$$

(generalización del teorema de Pitágoras)

vi) ABCD trirrectángulo en D si y sólo si se verifican las tres relaciones

$$\begin{aligned} 2DA^2 &= b^2 + c^2 - a^2 \\ 2DB^2 &= a^2 - b^2 + c^2 \\ 2DC^2 &= a^2 + b^2 - c^2 \end{aligned}$$

6. Tetraedro de Crelle (o esqueleto, o circumscriptible)

Es aquél tal que existe una esfera tangente a las 6 aristas (esfera hexatangente)

Las propiedades siguientes son equivalentes :

1.- ABCD es un tetraedro de Crelle

2.- $AD + BC = AC + BD = AB + CD$ (Crelle, 1821)

3.- Entre los ángulos diedros se verifica la relación

$$\widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{AC} + \widehat{BD} = \widehat{AD} + \widehat{BC}.$$

Propiedades

a) En un tetraedro de Crelle, con $BC = a_{23}, CA = a_{13}, AB = a_{12}$, volumen V y radio ρ de la esfera tangente a las seis aristas, se verifica

$$3V\rho = 2t_1t_2t_3t_4$$

donde t_1 es la distancia del vértice A a los puntos de tangencia de la esfera hexatangente con las tres aristas del tetraedro que concurren en A, y notaciones análogas para los demás (G. Dostor, 1874).

b) En un tetraedro de Crelle, los tres segmentos que unen los puntos de contacto de la esfera de Crelle con las aristas opuestas son concurrentes.

c)En un tetraedro de Crelle los cuatro círculos inscritos de las cuatro caras están en la misma esfera, y cada uno de ellos es tangente a los otros tres.

Recíprocamente, si los incírculos de dos de las caras de un tetraedro son tangentes, cada uno, a los de las tres restantes, el tetraedro es de Crelle.

d)Sean p, q, r, s las longitudes de las tangentes desde A,B,C y D a la esfera tangente a las aristas. Entonces

$$AB = p + q, BC = q + r, CA = r + p.$$

Se puede probar (Altshiller, p.296-297) que si llamamos d al inradio de ABC, se tiene

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{qr} + \frac{1}{rp} + \frac{1}{pq},$$

y que, si a, b, c son los inradios de BCD,CDA y DAB, entonces

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 2\left(\frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{ps} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{qs} + \frac{1}{rs}\right).$$

7. Tetraedro isodinámico (o incéntrico)

Se llama tetraedro incéntrico o isodinámico un tetraedro (A) tal que las rectas $A_i I_i$, que unen los vértices con los incentros de las caras opuesta, son concurrentes.

Las siguientes proposiciones son equivalentes :

1.- El tetraedro es isodinámico.
2.- Los productos de pares de aristas opuestas son iguales :

$$a_{12} \cdot a_{34} = a_{13} \cdot a_{24} = a_{14} \cdot a_{23}$$

3.- Los productos de los senos de los diedros opuestos son iguales.

Otras propiedades de los tetraedros isodinámicos

a)Un tetraedro isodinámico es isofacial si y sólo si es ortocéntrico.
b)Un tetraedro isodinámico es isofacial si y sólo si es de Crelle.
c)El carácter de isodinámico de un tetraedro es invariante por inversión.
d)Si ABCD es isodinámico, existe al menos un punto W tal que los tetraedros ABCW,WBCD,AWCD,ABWD son isodinámicos.Este punto W es el *punto isodinámico.*

En general existen dos puntos isodinámicos en un tetraedro isodinámico; ambos son inversos con respecto a la esfera circunscrita al tetraedro. Si sólo hay un punto isodinámico, entonces ABCD es regular, y W coincide con el centro O de la esfera circunscrita.

Esferas de Lucas de un tetraedro isodinámico

Victor Thébault (Mathesis 1936) generalizó al tetraedro el problema de los llamados círculos de Lucas para el triángulo : *dado el triángulo ABC, determinar tres círculos, tangentes al circuncírculo interiormente en A,B y C, y tangentes exteriormente entre sí, dos a dos.*

La construcción de los círculos en el plano es sorprendentemente sencilla, usando la homotecia.

Dado el tetraedro ABCD, de aristas

$$BC = a, CA = b, AB = c, DA = a', DB = b', DC = c'$$

inscrito en la esfera (O) de radio R, estudiaremos cuando es posible construir cuatro esferas $\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d$, mutuamente tangentes tres a tres, y además tangentes interiores a (O) en A,B,C, y D. Sean $\rho_a, \rho_b, \rho_c, \rho_d$ sus radios respectivos.

La generalización a una esfera de la fórmula que da la longitud de la tangente común exterior a dos circunferencias es

$$4\rho_b\rho_c = \frac{a^2}{R^2}(R-\rho_b)(R-\rho_c)$$

y cinco fórmulas análogas, que cuando se multiplican agrupándolas convenientemente dan nada menos que

$$\frac{16R^4\rho_a\rho_b\rho_c\rho_d}{(R-\rho_a)(R-\rho_b)(R-\rho_c)(R-\rho_d)} = (aa')^2 = (bb')^2 = (cc')^2.$$

Y esto significa que una condición necesaria (que también es suficiente) para que existan esas cuatro esferas es que el tetraedro sea isodinámico.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI