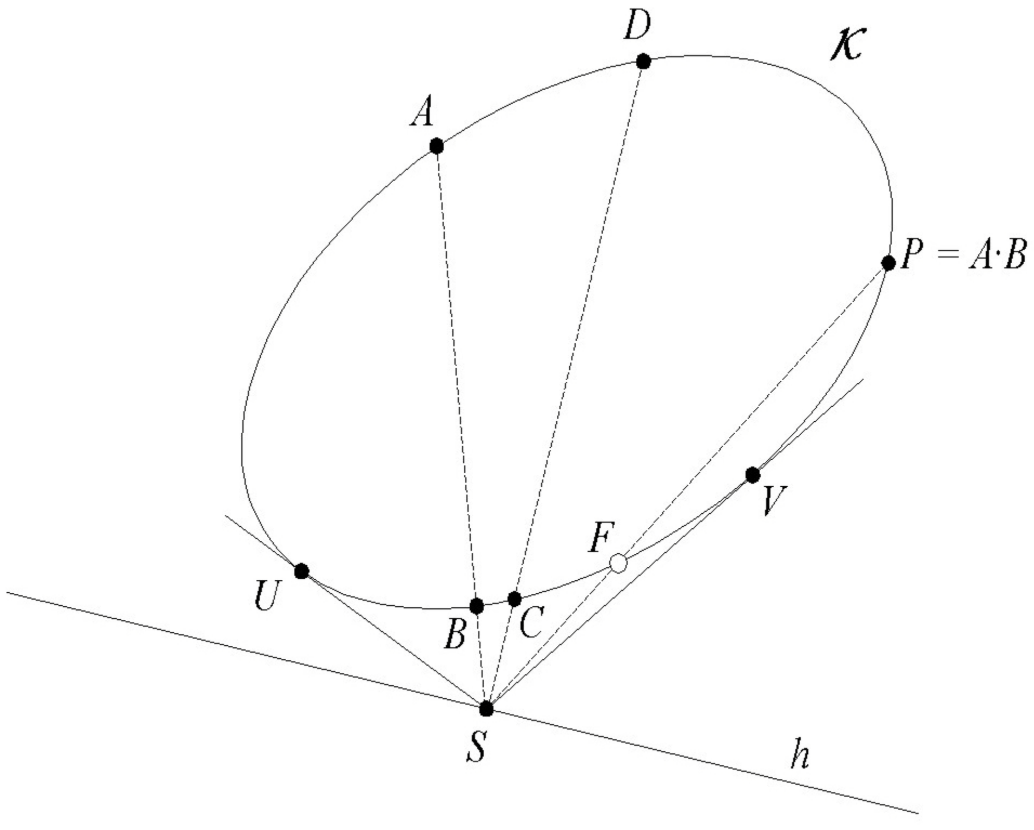
HABLANDO DE CUADRADOS NEGATIVOS...

Guido Lasters y Hugo Staelens

Los alumnos que se encuentran por primera vez ante los números imaginarios desconfían frecuentemente del hecho que $i^2=-1$. No siempre es fácil para el profesor de matemáticas hacer que sus estudiantes acepten tal fórmula, por no hablar de nuestra frustración para hacerles entender la utilidad de la misma. Hay diferentes maneras de introducir los números imaginarios. El enunciado axiomático de la fórmula no es un modo apto para convencer a los alumnos. No obstante, hay que decir que en los cursos de matemáticas uno se las arregla bastante bien.

Si se quiere convencer a los alumnos más profundamente de que los cuadrados negativos no son tan anormales, se puede volver más tarde sobre el problema, una vez que hayan sido estudiadas las cónicas. Se comprobará entonces que los cuadrados negativos aparecen de un forma natural.

Definiremos una multiplicación entre los puntos que se encuentran sobre una cónica k.

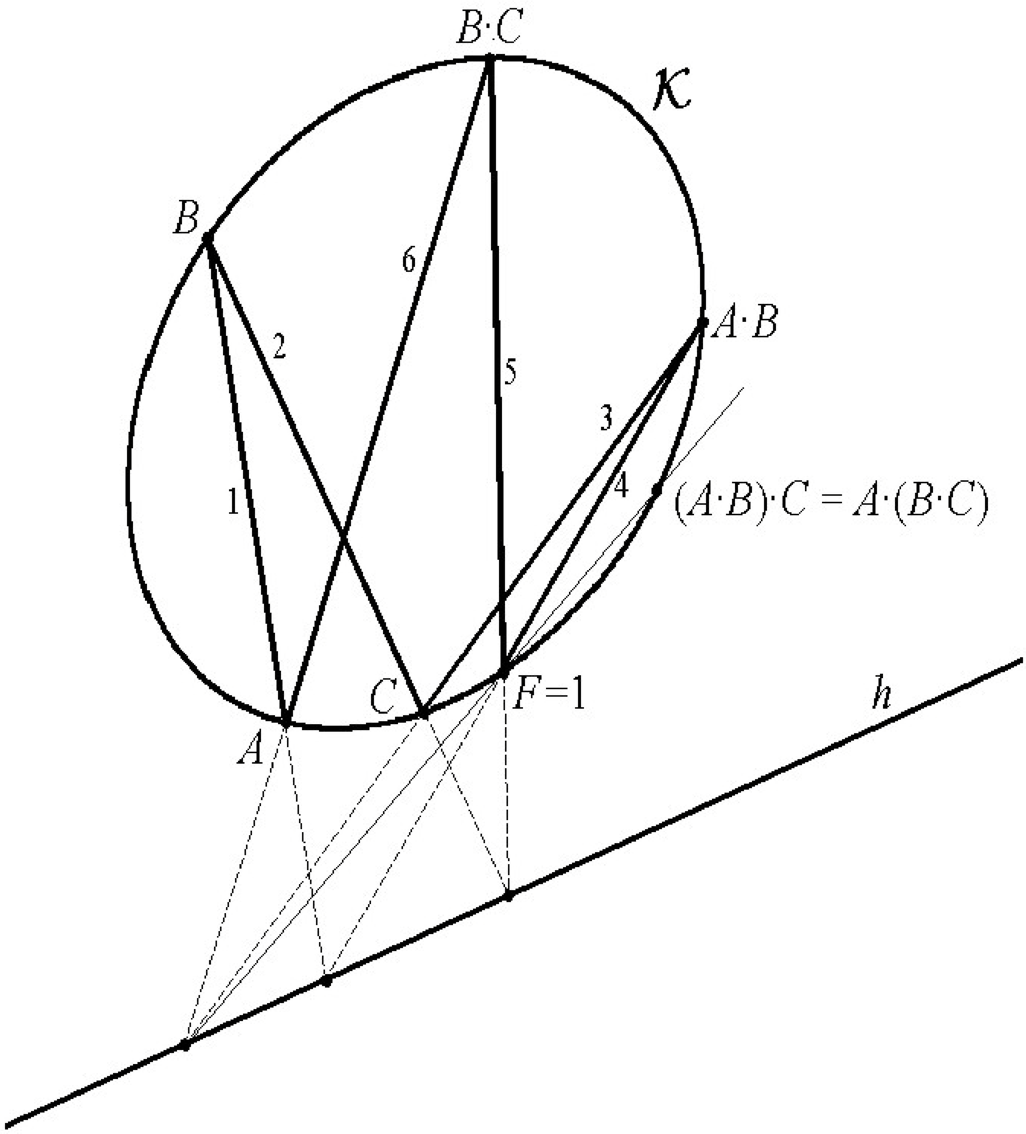


Sea F un punto fijo de k y sea h una recta fija en el plano. Por definición, el producto A∘B es el punto P, obtenido uniendo el punto de intersección S de la recta AB y la recta fija h, con el punto fijo F de k. (Ver fig. 1)

Se tiene, claramente,

$$P=A\circ B=C\circ D=U^2=V^2=P\circ F.$$

Resulta de aquí que la multiplicación es conmutativa y que F es su elemento neutro. A partir de ahora se puede representar a F por 1:F=1. La figura 2 muestra que la multiplicación es también asociativa.



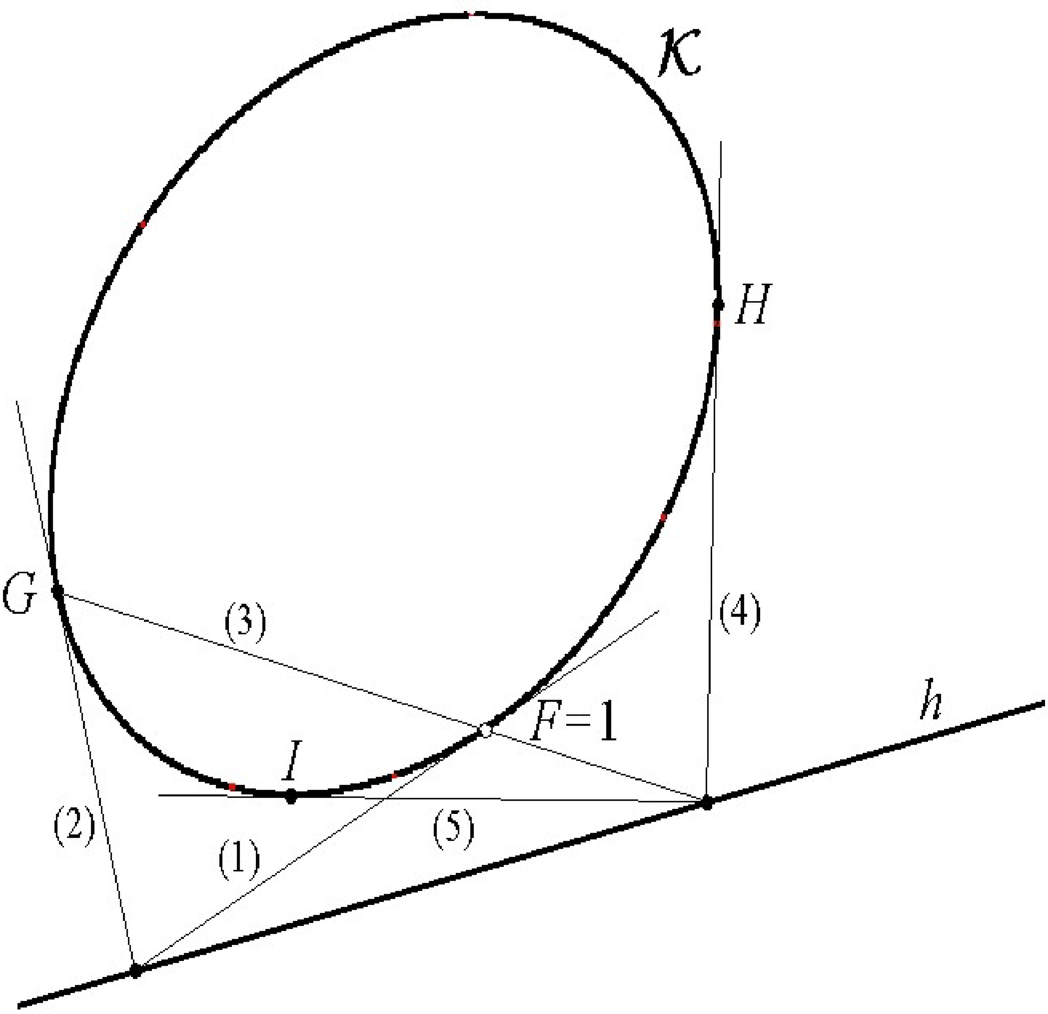
En efecto, si se piensa en el teorema de Pascal, aplicado al hexágono definido por los puntos A,B,C,A∘B,1,B∘C, se observa que los pares de puntos opuestos (1,4),(2,5) y (3,6) se cortan sobre la recta fija h.

Entonces es fácil ver que los puntos $(A\circ B)\circ C$ y $A\circ(B\circ C)$ coinciden,

$$(A\circ B)\circ C=A\circ(B\circ C),$$

lo que demuestra la asociatividad.

Consideremos ahora la figura 3. Para la construcción, sígase la numeración.



Se tiene $G^2=F^2$, y como $F=1$, se sigue que $G^2=1$. Podemos entonces identificar a G con -1:

$$G=-1.$$

Finalmente obtenemos

$$H^2=I^2=G\circ F=G\circ 1=G=-1.$$

Conclusión: H e I pueden identificarse con los números imaginarios i o -i:

$$H,I\in\{i,-i\}.$$

Los cuadrados negativos son inherentes a la Matemática. ¡Somos nosotros los que los debemos descubrir!

Guido Lasters
K.A.Redingerhof Leuven
Ganzendries 245
3300 Tienen (Oplinter)

Hugo Staelens
Ereleraar P.T.I. Eeklo
Beneluxstraat 1
9900 Eeklo