Nueve caracterizaciones de los triángulos cuyos lados están en progresión aritmética.

Sea un triángulo de vértices *A*, *B*, *C* y lados opuestos *a*, *b*, *c* respectivamente, supondremos sin pérdida de generalidad que $a \le b \le c$.
Denotaremos como es habitual por *p* al semiperímetro, *S* al área, *r* al inradio, *R* al circunradio, *I* el incentro, y $[X,Y,Z..]$ el área del polígono de vértices *X*, *Y*, *Z*,…
Diremos que un triángulo es de la clase P.A. cuando sus lados están en progresión aritmética, lo que supone que cumple las siguientes condiciones trivialmente equivalentes:

$$a+c=2b \Leftrightarrow 2p=3b \Leftrightarrow p-b=\frac{b}{2}$$

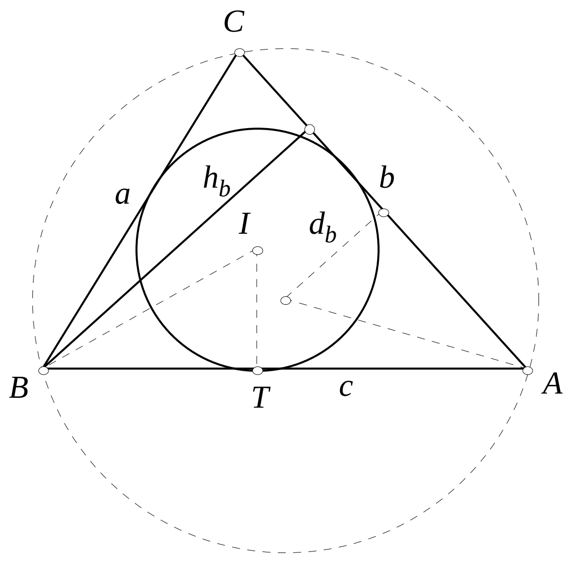
Vamos a establecer nueve condiciones necesarias y suficientes para que un triángulo pertenezca a la clase P.A.

1) La altura relativa al lado *b* es tres veces el inradio *r*. (XLI OME, Fase nacional 2005, apartado b).
En efecto, si h_b es la altura correspondiente al lado *b*, en cualquier triángulo se cumple: $pr=\frac{1}{2}bh_b$.
Si suponemos que el triángulo es P.A., tenemos

$$\frac{3br}{2}=\frac{1}{2}bh_{ab} \Leftrightarrow 3r=h_b$$

El recíproco se prueba siguiendo el mismo razonamiento en sentido contrario.

2) La distancia del circuncentro al lado *b* es *R* – *r*. (XLI OME, Fase nacional 2005, apartado c).



Pongamos d_b a la distancia entre el circuncentro y el lado *b*.
De una parte en todo triángulo se cumple

$$d_b{}^2=R^2-\frac{b^2}{4} \quad (1)$$

y de otra para los triángulos P.A. se tiene

$$tg\,\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}=\frac{2r}{2p-2b}=\frac{2r}{3b-2b}=\frac{2r}{b}.$$

Como

$$2R=\frac{b}{\operatorname{sen} B} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\operatorname{sen} B}=\frac{1+tg^2\frac{B}{2}}{2tg\frac{B}{2}},$$

resulta:

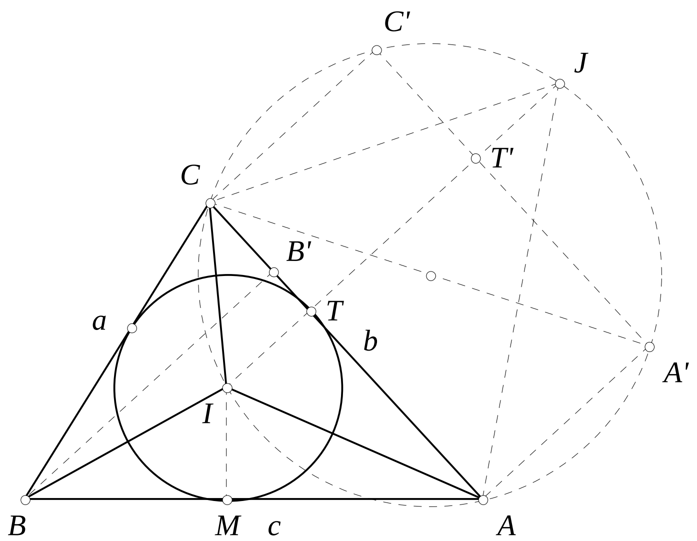
$$2R=b\frac{1+\frac{4r^2}{b^2}}{\frac{4r}{b}}=\frac{b^2}{4r}+r\Rightarrow\frac{b^2}{4}=2Rr-r^2$$

que sustituida en (1) queda:

$$d_b{}^2=R^2-\frac{b^2}{4}=R^2-2Rr+r^2=\left(R-r\right)^2\Leftrightarrow d_b=R-r\,.$$

El recíproco se prueba siguiendo el mismo razonamiento en sentido contrario.

3) Las áreas de los triángulos *ABC* y *ACJ* son iguales. (Revista Escolar de la OIM - Número 21 problema 101).
Siendo *T* el punto de tangencia del círculo inscrito con el lado *AC* y *J* la segunda intersección de la recta IT con el círculo circunscrito al triángulo *AIC* .



Primero vamos a calcular *TJ* en función de elementos del triángulo *ABC*
Trazamos las perpendiculares a *AC* por *A* y *C* que cortan de nuevo al circuncírculo en *A'* y *C'* respectivamente determinando el rectángulo *CAA'C'* inscrito en el circuncírculo de *ACJ*.
Claramente se tiene

$$\widehat{CAJ}=90^{\text{o}}-\frac{C}{2},\widehat{ACJ}=90^{\text{o}}-\frac{A}{2}.$$

Entonces

$$\widehat{ACA'}=\widehat{ACJ}-\widehat{A'CJ}=90^{\text{o}}-\frac{A}{2}-\widehat{A'AJ}=90^{\text{o}}-\frac{A}{2}-\frac{C}{2}=\frac{B}{2}.$$

Por tanto lo triángulos *IBM* y *A'CA* son semejantes y se tiene

$$\frac{AA'}{CA}=\frac{r}{BM}\Leftrightarrow AA'=r\frac{CA}{p-b},$$

y de ahí que

$$TJ = TT' + T'J = AA' + r = r\frac{b}{p-b} + r = r\left(\frac{b}{p-b}+1\right) = \frac{pr}{p-b}$$

pero $pr = \frac{1}{2}b \cdot BB'$ (ambas expresiones son el área de ABC) y nos queda finalmente

$$TJ = \frac{b \cdot BB'}{2\left(p-b\right)}.$$

Relación válida en cualquier triángulo. Si suponemos que el triángulo es de la clase P.A., entonces

$$p-b = \frac{b}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{2\left(p-b\right)} = 1 \Leftrightarrow TJ = BB'.$$

Y los triángulos *ABC* y *ACJ* tienen la misma área al tener la misma base y alturas equivalentes.
Recíprocamente, si los triángulos *ABC* y *ACJ* tienen la misma área, al tener la base común sus alturas serán iguales, por tanto

$$TJ = BB' \Leftrightarrow \frac{b}{2\left(p-b\right)} = 1 \Leftrightarrow 2p = 3b \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

4) $\operatorname{sen}\frac{B}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$. (Nota añadida a la solución del problema anterior).
En efecto, en cualquier triángulo se cumple

$$\left.\begin{array}{r} TJ = CJ\cos\frac{A}{2} \\ TJ = BB' = c\operatorname{sen}A = 2c\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow CJ = 2c\operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

de modo análogo $AJ = 2a\operatorname{sen}\frac{C}{2}$ y el área de *CAJ* vale

$$\left[CAJ\right] = \frac{1}{2}CJ \cdot AJ \cdot \operatorname{sen}\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) = 2ac\ \operatorname{sen}\frac{C}{2}\ \operatorname{sen}\frac{A}{2}\ \cos\frac{B}{2}$$

por otra parte

$$\left[ABC\right] = \frac{1}{2}ac\operatorname{sen}B = ac\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$$

Si el triángulo es de la clase P.A,, las áreas son iguales y resulta

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}.$$

Esta caracterización se expresa en función de elementos que sólo dependen de la “forma” del triángulo. Resultado esperable ya que la pertenencia a la clase P.A. es invariante por semejanza.
Para probar el recíproco basta seguir el razonamiento en sentido contrario.
Como

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2} = \cos\frac{A+C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2},$$

sustituyendo en la expresión anterior y operando, resulta otra caracterización equivalente

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$$

5) $\dfrac{S\left(r_a-r_c\right)}{b^2\left(a-c\right)}=\dfrac{3}{4}$. Siendo r_a, r_b, r_c los exinradios.

Es sabido que en cualquier triángulo $r_a=\dfrac{S}{p-a}$, $r_c=\dfrac{S}{p-c}$.

entonces,

$$r_a-r_c=S\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p-c}\right)=\frac{S\left(a-c\right)}{\left(p-a\right)\left(p-c\right)}=\frac{S^2\left(a-c\right)}{S\left(p-a\right)\left(p-c\right)}$$

como $S^2=p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)$, resulta

$$r_a-r_c=\frac{S^2\left(a-c\right)}{S\left(p-a\right)\left(p-c\right)}=\frac{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)\left(a-c\right)}{S\left(p-a\right)\left(p-c\right)}=\frac{p\left(p-b\right)\left(a-c\right)}{S}$$

$$\frac{S\left(r_a-r_c\right)}{\left(a-c\right)}=p\left(p-b\right).$$

Si el triángulo es P.A., entonces

$$2b=a+c\Leftrightarrow 2p=a+b+c=3b\Leftrightarrow p=\frac{3}{2}b,\ p-b=\frac{1}{2}b\Leftrightarrow p\left(p-b\right)=\frac{3}{4}b^2,$$

y sustituyendo queda

$$\frac{S\left(r_a-r_c\right)}{b^2\left(a-c\right)}=\frac{3}{4}$$

Para probar el recíproco basta seguir el razonamiento en sentido contrario.

6) $6Rr=ac$. (Propuesto sin resolver en "Traité de Géométrie" de Eugène Rouché i Charles de Comberousse).

Es sabido que $R=\dfrac{abc}{4rp}$, siendo p el semiperímetro.

Si el triángulo es P.A., , $2b=a+c$ y en consecuencia $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{3b}{2}$ de donde,

$$Rr=\frac{abc}{4p}=\frac{abc}{6b}\Rightarrow 6Rr=ac$$

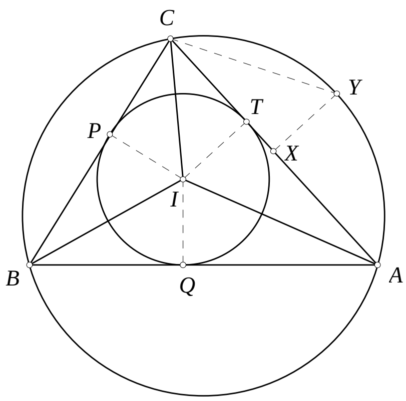
Recíprocamente, si $6Rr=ac$; entonces

$$\frac{3abc}{2p}=ac\Rightarrow 3b=2p=a+b+c\Leftrightarrow b=\frac{a+c}{2}$$

7) $AT\cdot TC=3r^2$, siendo T el punto de tangencia del incírculo con el lado AC. (Problema 144 de la Gaceta de la RSME apartado b).
Como

$$r=\sqrt{\frac{\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}{p}},$$

se tiene



$$AT\cdot TC=(p-a)(p-c)=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-b)}=\frac{pr^2}{p-b}=\frac{3b}{2}\cdot\frac{2}{b}r^2=3r^2$$

y recíprocamente,

$$3r^2=\frac{3(p-a)(p-b)(p-c)}{p}=\frac{3AT\cdot TC(p-b)}{p}\Rightarrow\frac{3(p-b)}{p}=1\Rightarrow 2p=3b\Rightarrow a+c=2b$$

8) $XY=r$, siendo *X* es el punto medio del lado *AC*, e *Y* el punto medio del arco *AC* del circuncírculo que no contiene a *B*. (Problema 144 de la Gaceta de la RSME apartado c).

En efecto, como $\widehat{XCY}=\frac{B}{2}$, los triángulos *CYX* y *PBI* son semejantes.

Si el triángulo es P.A., entonces $(p-b)=\frac{b}{2}$, y los triángulos *CYX* y *PBI* son iguales de donde $XY=r$.

Recíprocamente, si $XY=r$ entonces los triángulos *CYX* y *PBI* son iguales y se sigue que

$$CX=\frac{b}{2}=BP=p-b\Leftrightarrow p=\frac{3b}{2}$$

9) $\frac{IA\cdot IC}{IB}=2r$. (Problema 144 de la Gaceta de la RSME apartado d).

En efecto, $BP=p-b=\frac{b}{2}$ si y sólo si $[ICA]=2[BIP]$ ya que ambos triángulos tienen la misma altura *r* y uno de ellos tiene la base doble que la del otro.

Calculando ambas áreas

$$[ICA]=\frac{1}{2}IA\cdot IC\cdot\operatorname{sen}\widehat{AIC}=\frac{1}{2}IA\cdot IC\cdot\operatorname{sen}\left(90^{\circ}+\frac{B}{2}\right)=\frac{1}{2}IA\cdot IC\cdot\cos\frac{B}{2}$$

$$[IPB]=\frac{1}{2}r\cdot IB\cdot\operatorname{sen}\left(90^{\circ}-\frac{B}{2}\right)=\frac{1}{2}r\cdot IB\cos\frac{B}{2}$$

multiplicando por 2 la segunda e igualando con la primera, resulta:

$$r\cdot IB=\frac{1}{2}IA\cdot IC\Leftrightarrow 2r=\frac{IA\cdot IC}{IB}.$$