Evgeniy Kulanin, Alexei Myakishev

Algunas cónicas relacionadas con el triángulo

Moscú
2007

Resumen. Estudiamos tres resultados sobre el triángulo y algunas cónicas relacionadas con él.

1. Cónicas plus Triángulo: tres problemas.

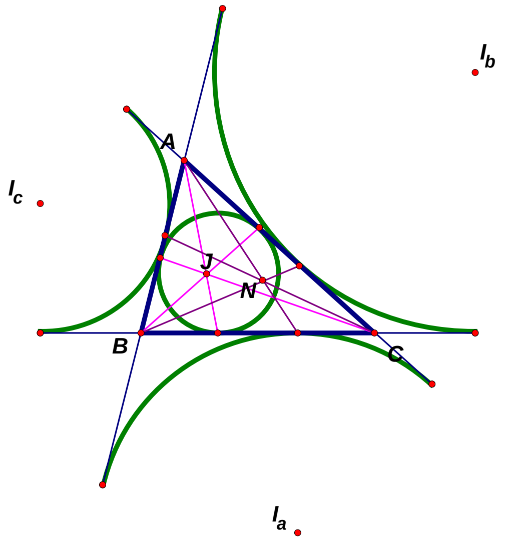
El objetivo de este artículo es presentar al lector algunas propiedades interesantes de ciertas cónicas relacionadas con un triángulo.
Consideremos tres problemas propuestos por *Evgeniy Kulanin*:
1.
Probar que la recta que une el punto de Nagel y el punto de Gergonne de un triángulo escaleno es paralela a un lado de este triángulo, si y solamente si el punto de Feuerbach está sobre la mediana que pasa por el vértice opuesto a dicho lado.
2.
Probar que la recta que une el baricentro y el punto de Lemoine de un triángulo escaleno es paralela a un lado del triángulo, si y solamente si el punto de Steiner pertenece a la recta que contiene a la mediana que pasa por el vértice opuesto a dicho lado.
3.
Probar que la hipérbola de Kiepert es tangent a la elipse de Steiner circunscrita al triángulo si y solamente si la parabola de Kiepert es tangent a la elipse de Steiner inscrita en el triángulo.

Antes de presentar las soluciones invitamos al lector a dar un corto paseo por la *tierra de las cónicas del triángulo.*
Las demostraciones de los resultados que siguen (en la sección 2) se encuentran en [1],[2],[3].

2. Algunos resultados de la Geometría del Triángulo. Principales propiedades de las cónicas del triángulo.

a. Puntos notables del triángulo.

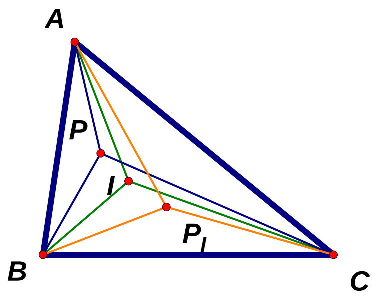
Según fuentes históricas, los antiguos griegos conocieron cuatro puntos notables – el baricentro G, circuncentro O, incentro I y ortocentro H. Desde aquella época se han añadido muchos puntos a esta lista..
Por ejemplo, los puntos de Gergonne J y de Nagel N.
Puntos de Gergonne y Nagel.
El punto de Gergonne es el punto de intersección de las rectas que unen los vértices del triángulo con los puntos de tangencia del círculo inscrito con los lados respectivamente opuestos.
El punto de Nagel es el punto de intersección de las rectas que unen los vértices del triángulo con los puntos de tangencia de los círculos exinscritos con los lados respectivamente opuestos.



b. Conjugados isogonales e isotómicos. Puntos fijos.

Conjugado isogonal.

Supongamos que P es un punto del plano del triángulo ABC, no situado en ninguna de las rectas que contienen los lados. Se halla la recta simétrica de AP respect de la bisectriz interior del ángulo A; la de BP y la de CP respecto de las bisectrices análogas. Las tres rectas simétricas concurren en el punto *isogonal conjugado* de P, que llamamos P_l .

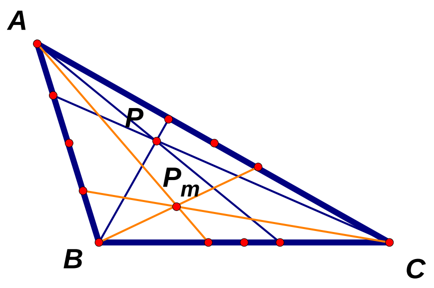


La conjugación isogonal, considerada como una transformación F_l del plano, tiene cuatro puntos fijos : el incentro y los exincentros I, I_a, I_b, I_c .

Por ejemplo, el circuncentro *O* y el ortocentro *H* forman un par de isogonales conjugados.

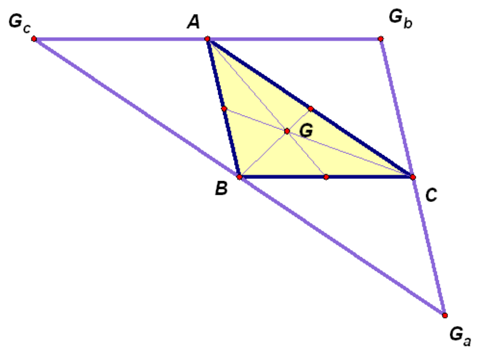
Conjugado isotómico.

Sea *P* un punto del plano del triángulo *ABC*, no situado en las rectas que contienen los lados. Sean A_1, B_1, C_1 los puntos en los que las rectas *AP*, *BP*, *CP* cortan a las rectas *BC*, *CA*, *AB*, respectivamente. Los simétricos de A_1, B_1, C_1 respecto de los puntos medios de los lados *BC*, *CA*, *AB* son los puntos A_2, B_2, C_2, respectivamente. Las rectas AA_2, BB_2, CC_2 concurren en el *conjugado isotómico* de P, P_m.



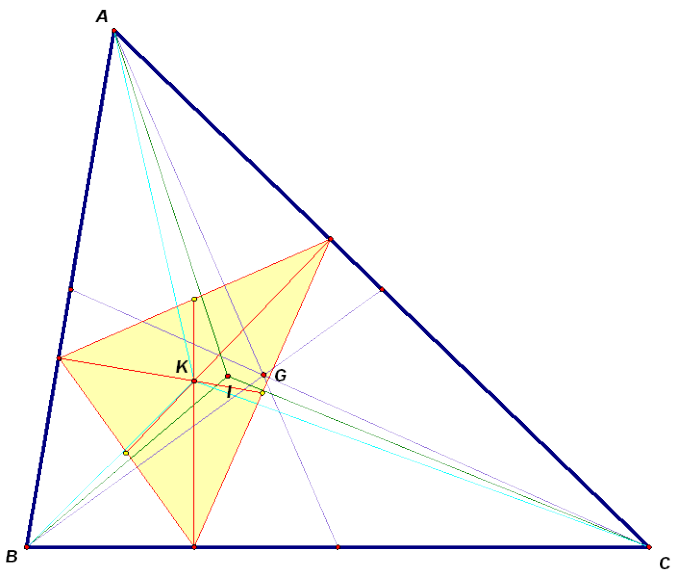
La conjugación isotómica, considerada como una transformación F_m del plano, tiene cuatro puntos *fijos* : el baricentro y los vértices del triángulo anticomplementario (el triángulo cuyo triángulo medial es *ABC*) - G, G_a, G_b, G_c.

Por ejemplo, el punto de Gergonne J y el de Nagel N *son un par de puntos conjugados isotómicos*.

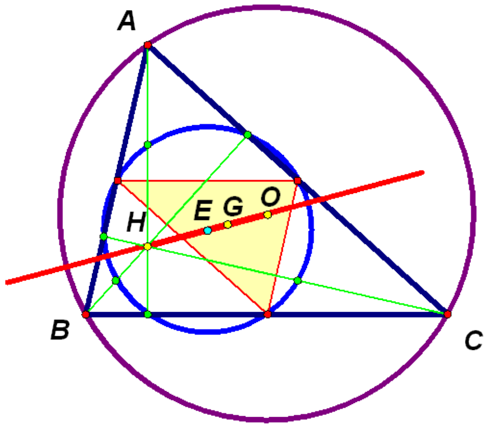


c. El punto de Lemoine.

El conjugado isogonal del baricentro G es el punto de Lemoine *K* (también llamado *punto simediano*).
K es el único punto que es el baricentro de su propio triángulo *pedal* (*o mejor dicho, podario).*



d. La recta de Euler y el círculo de Euler. El teorema de Feuerbach y el punto de Feuerbach.



La recta de Euler

El circuncentro O, el ortocentro H y el baricentro G de un triángulo no equilátero están alineados. Además, $OG : GH = 1 : 2$.

La recta OGH es la recta de Euler del triángulo.

El círculo de Euler

Sea ABC un triángulo dado, con

(i) A_1, B_1, C_1 los puntos medios de los lados BC, CA, AB,

(ii) P, Q, R las proyecciones ortogonales de los vértices A, B, C sobre sus lados opuestos; las alturas AP, BQ, CR concurren en el ortocentro H,

(iii) X, Y , Z los puntos medios de los segmentos AH, BH, CH.

Los nueve puntos A_1, B_1, C_1, P, Q, R, X, Y , Z son *concíclicos*.

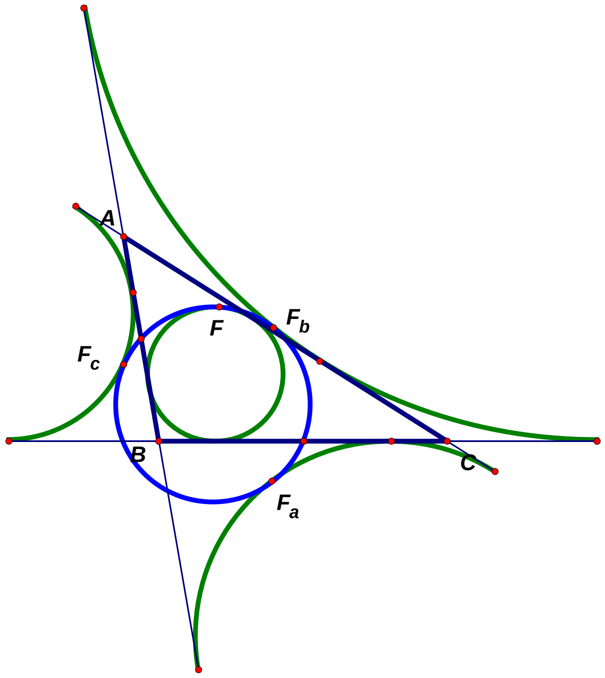
Éste es el círculo de Euler (o de los nueve puntos) de ABC. El centro de este círculo es E, que es el circuncentro del triángulo medial.

El centro E del círculo de los nueve puntos está en la recta de Euler y es el punto medio del segmento OH.

El teorema de Feuerbach.

En 1822 Karl Feuerbach publicó el siguiente notable resultado:

El círculo de los nueve puntos de un triángulo es tangent interiormente al incírculo y externamente a cada uno de los círculos exinscritos.



El punto *F* de tangencia del círculo inscrito con el de Euler se llama *punto de Feuerbach*

e. Otras rectas notables.

Diámetro de Brocard

Es la recta que pasa por el circuncentro *O* y el punto de Lemoine *K*.

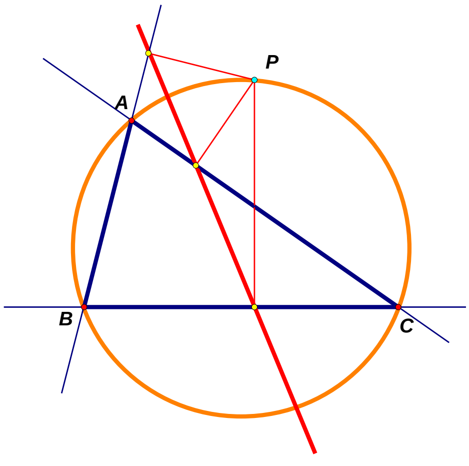
La recta de Gergonne.

Es la recta que une los puntos de Gergonne *G* y de Nagel *N*. Contiene además a los puntos H_m, I_m - conjugados isotómicos del incentro *I* y del ortocentro *H*.

La recta de Lemoine.

El punto de Lemoine *K*, el antiortocentro H_m y el baricentro *G* de un triángulo no equilátero están alineados y $KG : GH_m = 1 : 2$.

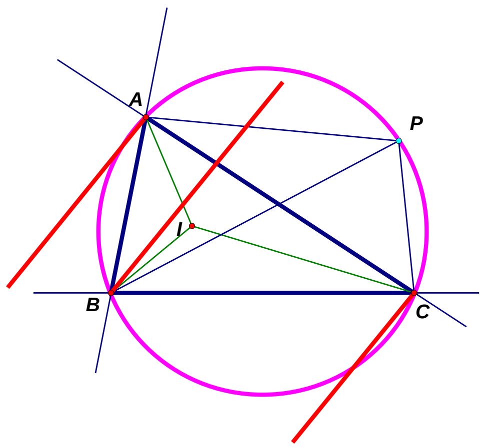
La recta de Simson.



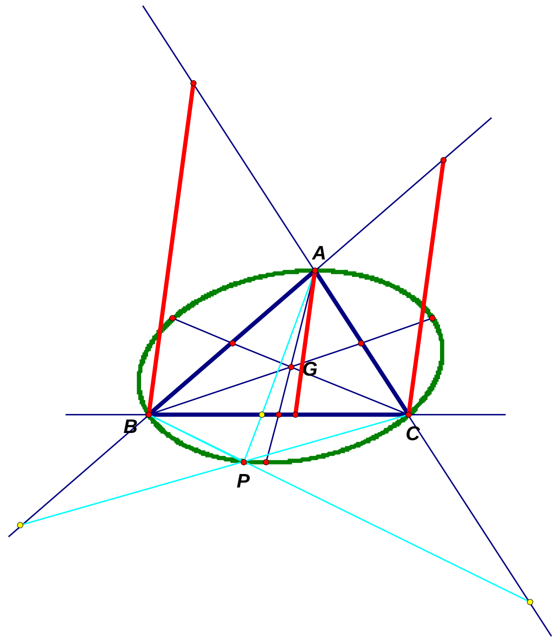
Dado un punto *P* sobre la circunferencia circunscrita al triángulo *ABC*, construimos sus proyecciones ortogonales sobre las rectas que contienen los lados del triángulo. Estas proyecciones están alineadas sobre la llamada *recta de Simson* s(*P*) of *P*.

f. Puntos del infinito. Recta del infinito y conjugados.

Desde el punto de vista de la geometría *proyectiva*, toda familia de rectas paralelas tiene un punto común – llamado *punto del infinite* . Y todos los puntos del infinito del plano proyectivo forman la llamada *recta del infinitoy*. La recta del infinito es la conjugada isogonal de la circunferencia circunscrita.



Es también la transformada isotómica de la *elipse circunscrita de Steiner* (cuyo centro es el baricentro *G*)



g. Algunas propiedades generales de las cónicas.

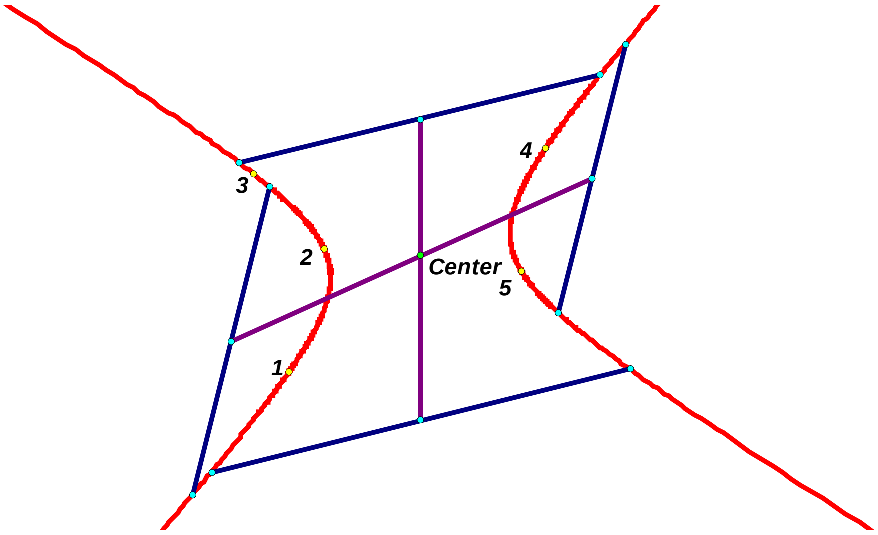
Todas las cónicas son *pryjectivamente equivalentes*, es decir, una cónica arbitraria puede transformarse en otra por una transformación proyectiva.

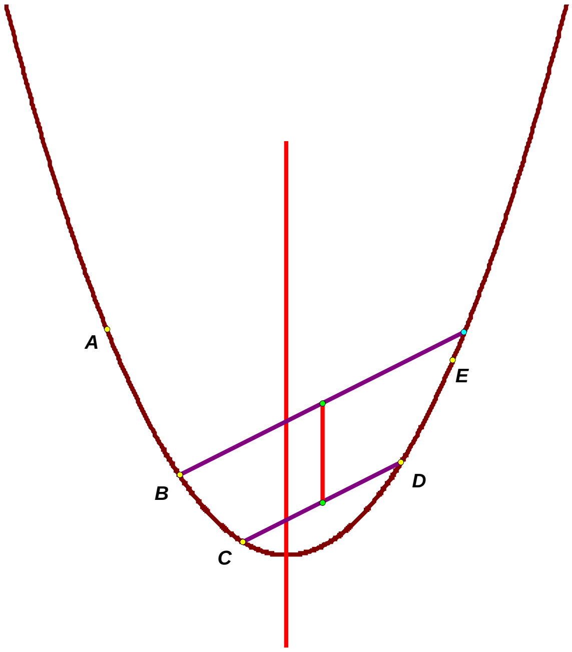
La Hipérbola tiene dos puntos de intersección con la recta del infinito; la *parábola* es tangente a ella (en otras pañabras, tiene un solo punto común con esa recta) y la *elipse* no tiene puntos comunes con la recta del infinito.

Cinco puntos del plano determinan una cónica, así como cinco rectas tangentes en el plano.

La hipérbola y la elipse son curvas *centro-simétricas* (en el caso de la parábola se puede considerer el punto del infinito del eje de la parábola como su centro).

Cualquier recta que une los puntos medios de dos cuerdas paralelas de la cónica pasa por el centro de ésta (en el caso de la parábola es una recta paralela al eje de la parábola).





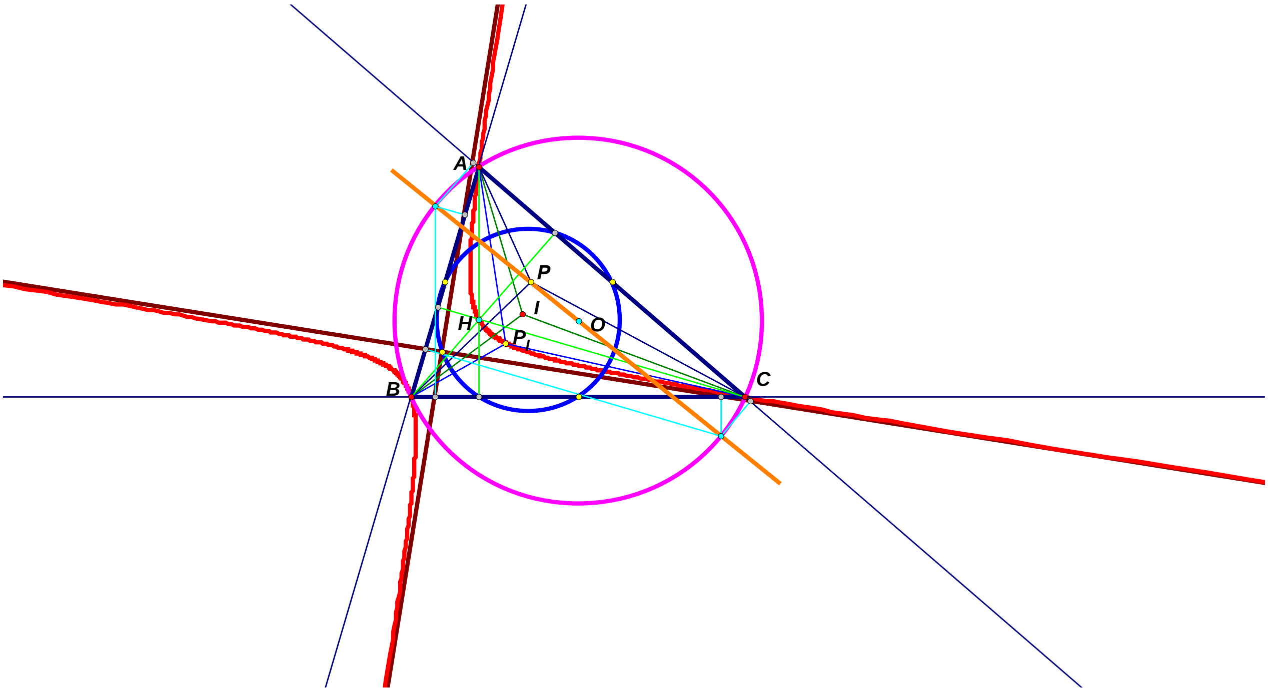
h. Cónicas circunscritas e inscritas.

Una *circucónica* pasa por los vertices del triángulo de referencia y puede considerarse la transformada isogonal (o isotómica) de una recta.

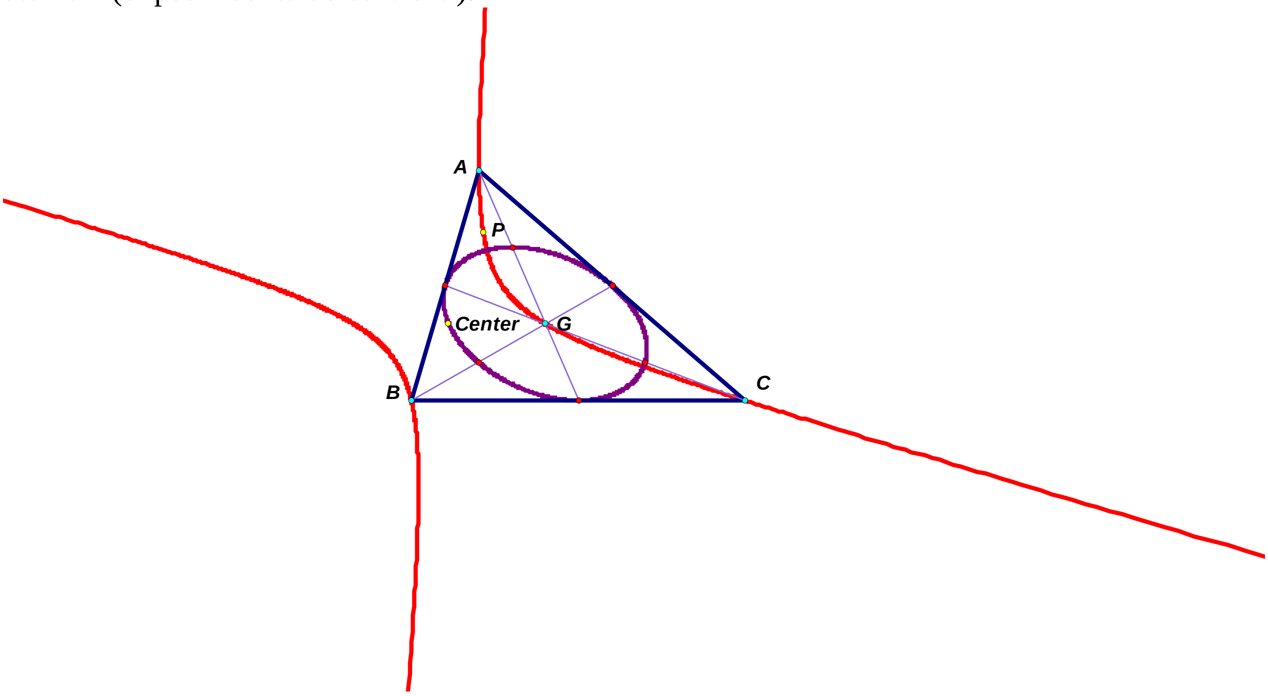
La circunferencia circunscrita es la transformada isogonal de la recta del infinito. Por lo tanto, una cónica circunscrita es una elipse, una hipérbola o una parábola según que su transformada isogonal corte a la circunferencia circunscrita en 0, 1, o 2 puntos reales.

Aparte de los tres vertices, la cónica circunscrita corta a la circunferencia circunscrita al triángulo en el conjugado isogonal del punto del infinito de la recta.(En el caso de la transformada isotómica de la recta debemos considerar la *circunelipse de Steiner* en vez del círculo circunscrito).

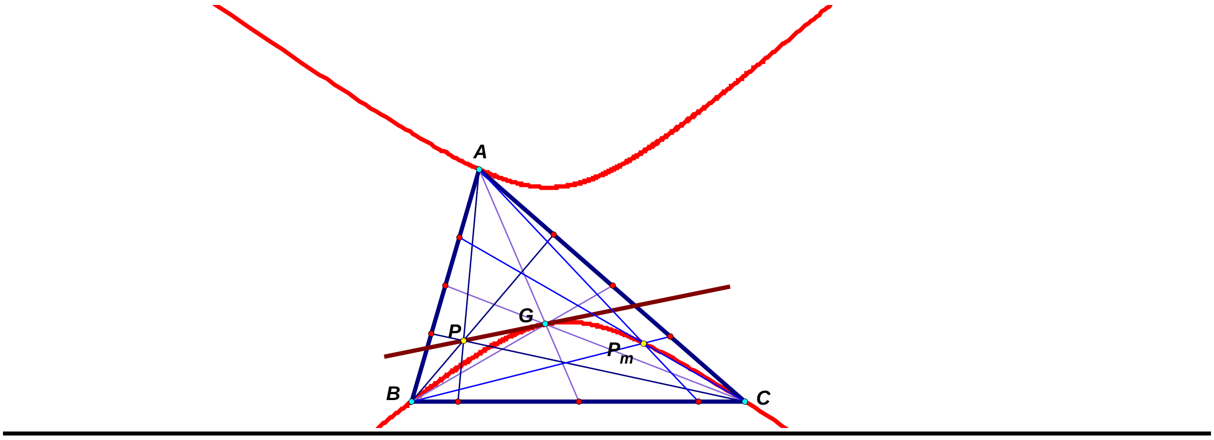
La cónica circunscrita es una hipérbola rectangular si y solamente si esta curva pasa por el ortocentro *H*.
Sean *R* y *T* puntos diametralmente opuestos de la circunferencia circunscrita. Las asíntotas de la circun-hipérbola rectangular que es la transformada isogonal de *RT* son las rectas de Simson de *R* y *T*. Se deduce de aquí que el centro de la circun-hipérbola rectangular es la intersección de esas rectas de Simson, y es un punto del círculo de los nueve puntos.

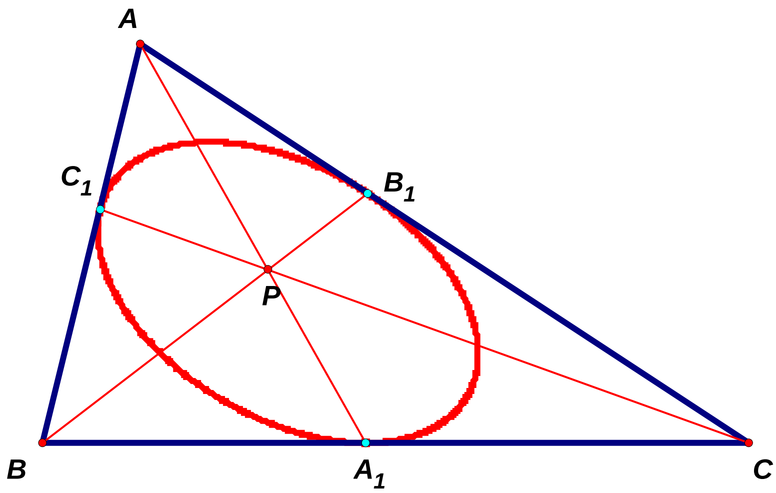


El centro de una circun-hipérbola que pasa por el baricentro *G* es un punto de la *in-elipse de Steiner* (elipse inscrita de centro *G*).



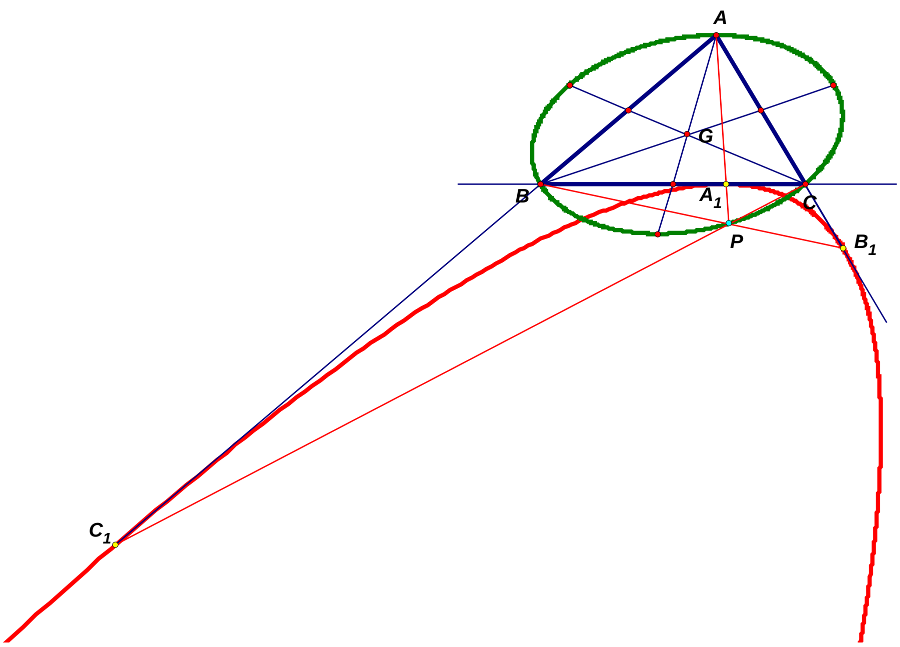
Si la circuncónica es la transformada isogonal (isotómica) de una recta que pasa por un *punto fijo* de la conjugación correspondiente, entonces esta recta es tangente a la cónica en dicho punto (la figura siguiente ilustra el caso de la transformación isotómica de una recta que pase por *G*.)





Una cónica *inscrita* es tangente a las tres rectas que contienen los lados del triángulo *ABC*.
Los puntos de tangencia forman un triángulo perspectivo con *ABC*, que llamaremos el *perspector* de la cónica inscrita.

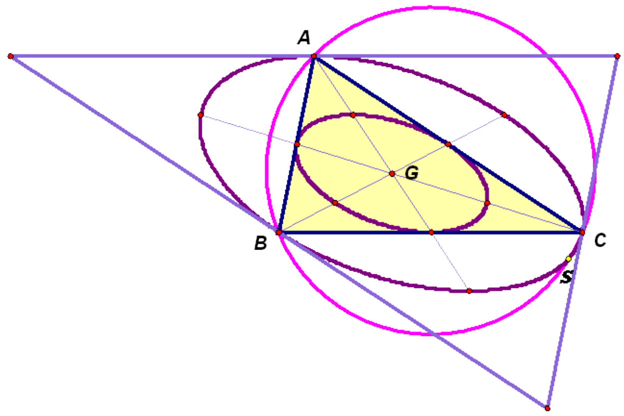
El perspector de una parábola inscrita es un punto de la *circun elipse de Steiner*



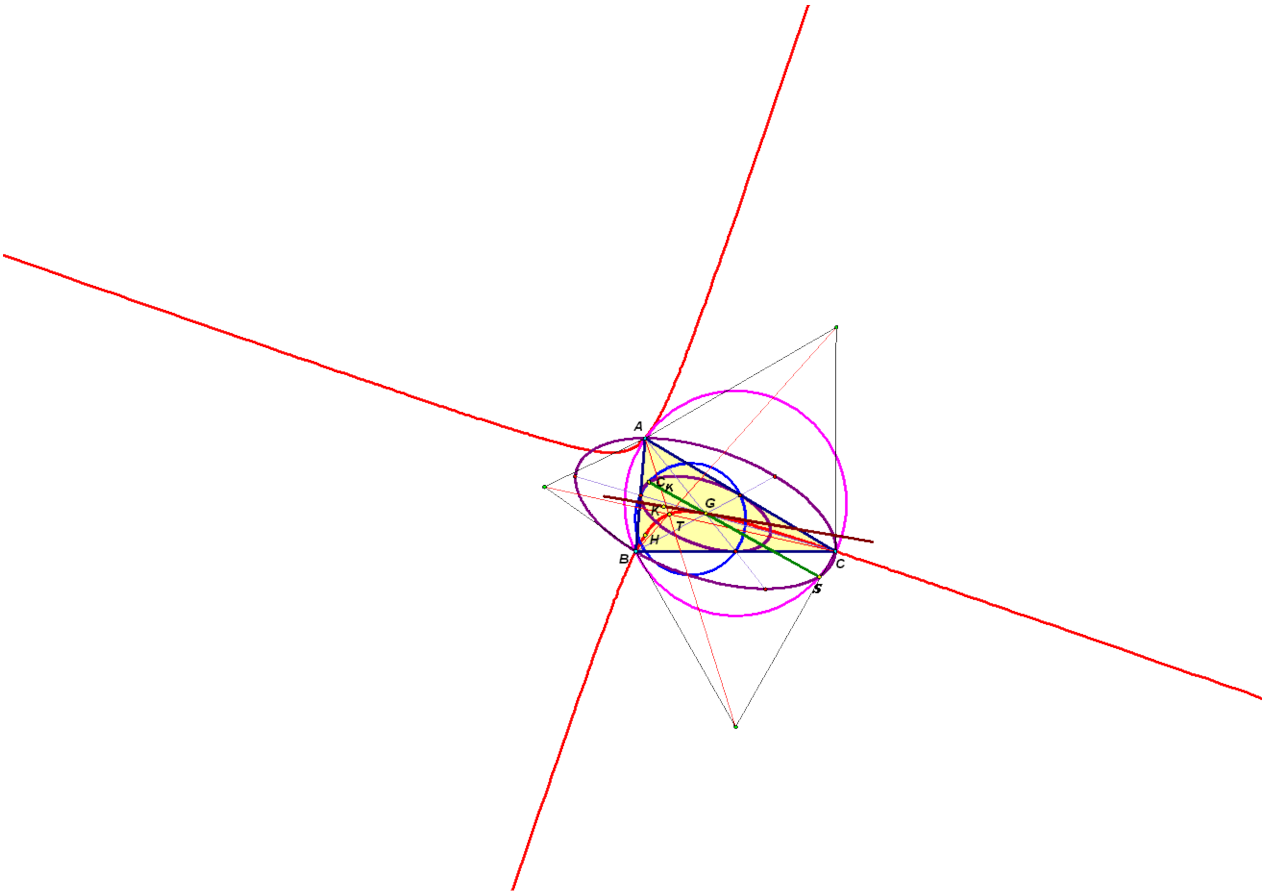
La *directriz* de una *parábola inscrita* pasa por el ortocentro *H* y el foco pertenece a la circunferencia circunscrita.

i. Cinco cónicas notables.

La circun-elipse de Steiner y la in-elipse de Steiner. El punto de Steiner **S**.
La circun-elipse de Steiner es una elipse circunscrita de centro *G*.
La in-elipse de Steiner es una elipse inscrita de centro *G*.
La circun-elipse de Steiner es la imagen de la *in-elipse de Steiner* en la *homotecia* h(*G*,-2) (observes que el circuncírculo es la imagen del círculo de Euler en esta homotecia).
Los lados del *triángulo anticomplementario son tangentes* a la circun-elipse de Steiner en los vértices del triángulo de referencia.
El punto de Steiner point **S** es el *cuarto punto* de intersección de la *circun-elipse de Steiner* con el *circuncírculo.*

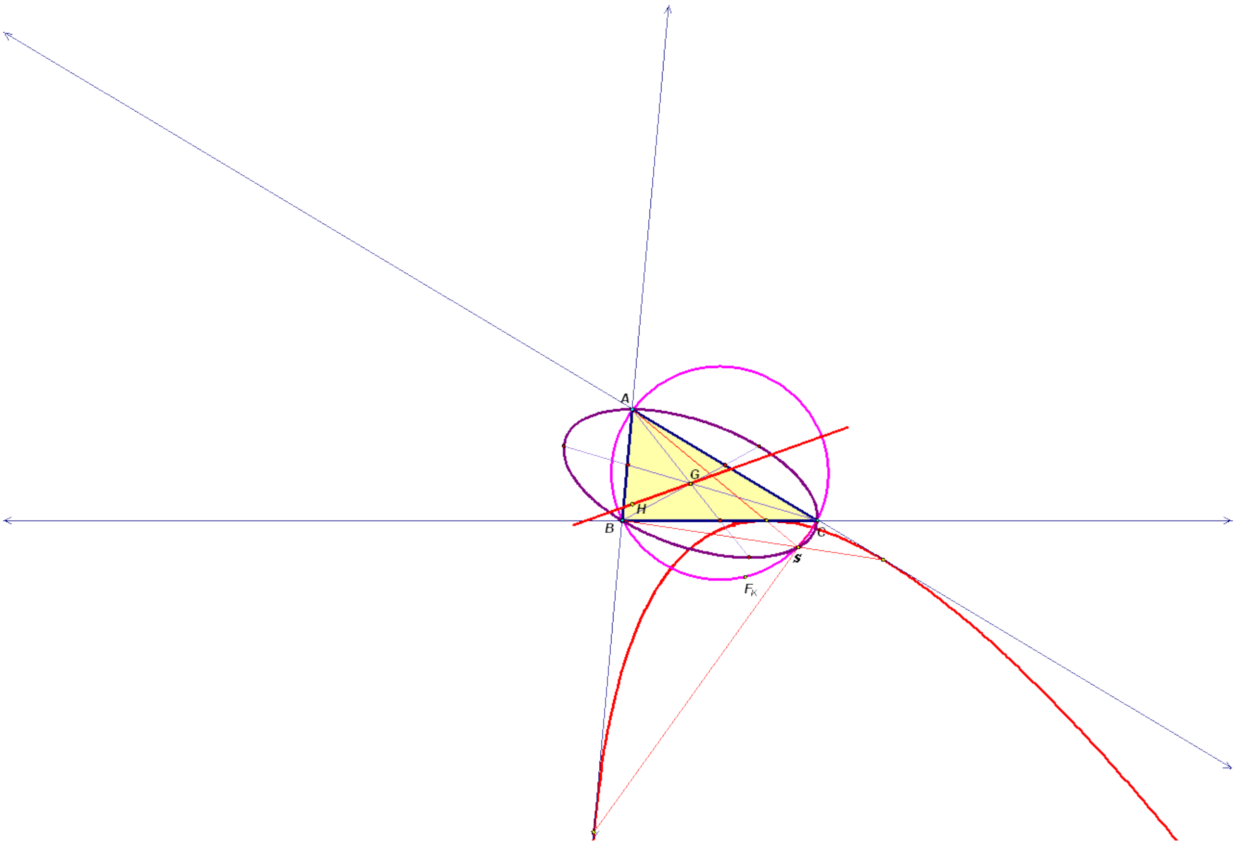


La hipérbola de Kiepert.
Es una hipérbola rectangular circunscrita, que pasa por *G* y *H*. El conjugado isogonal de la hipérbola de Kiepert es el diámetro de Brocard, y el conjugado isotómico es la recta de *Lemoine* , que es tangente a la hipérbola en el baricentro *G* (ver las seccionese **2.e, 2.h**).
Las rectas que unen los vertices del triángulo dado y los correspondientes *picos* de los triángulos isosceles concurren y el lugar de esos puntos es también la hipérbola de Kiepert (en el caso de los *triángulos equiáateros* se obtiene el famoso punto de *Fermat-Torricelli T*).
De acuerdo con **2.h**, el centro C_K de la hipérbola de Kiepert es el *cuarto punto* de intersección de la *in-elipse de Steiner* con el *círculo de Euler.* Se sigue que el punto de Steinert **S** es la imagen de C_K en la homotecia h(*G*,-2), luego los puntos **S**, *G*, C_K están alineados y $\frac{SG}{GC_K} = \frac{2}{1}$.



La parabola de Kiepert .

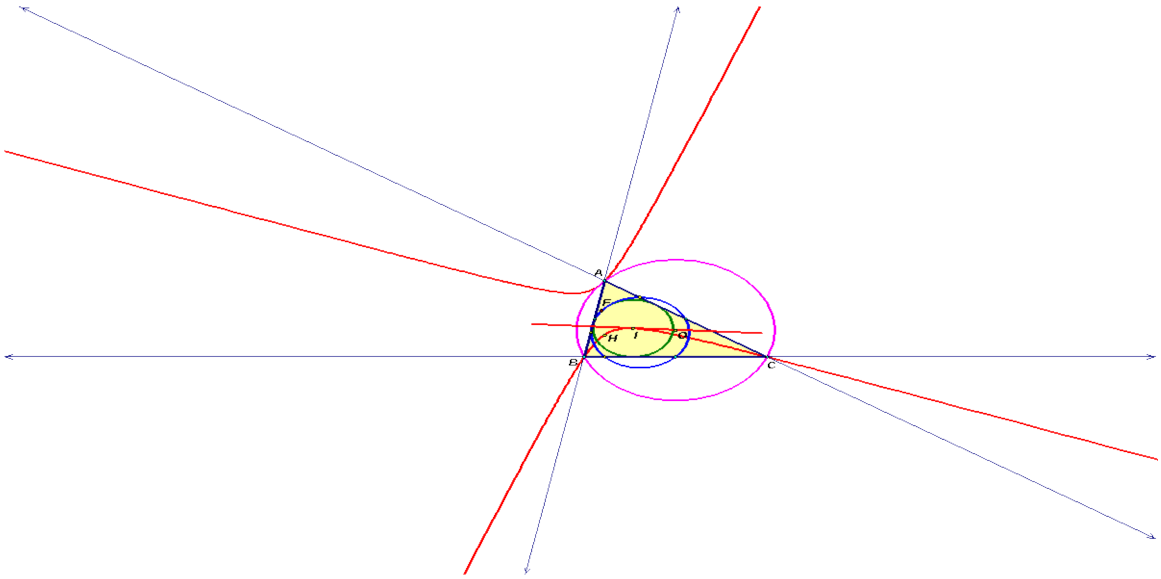
Es la parabola inscrita cuya directriz es la recta de Euler. Su perspector coincide con el punto de Steiner point **S**, y su foco está en la circunferencia circunscrita; es el resultado de la composición $F_l \circ F_m$(**S**).



La hipérbola de Feuerbach .

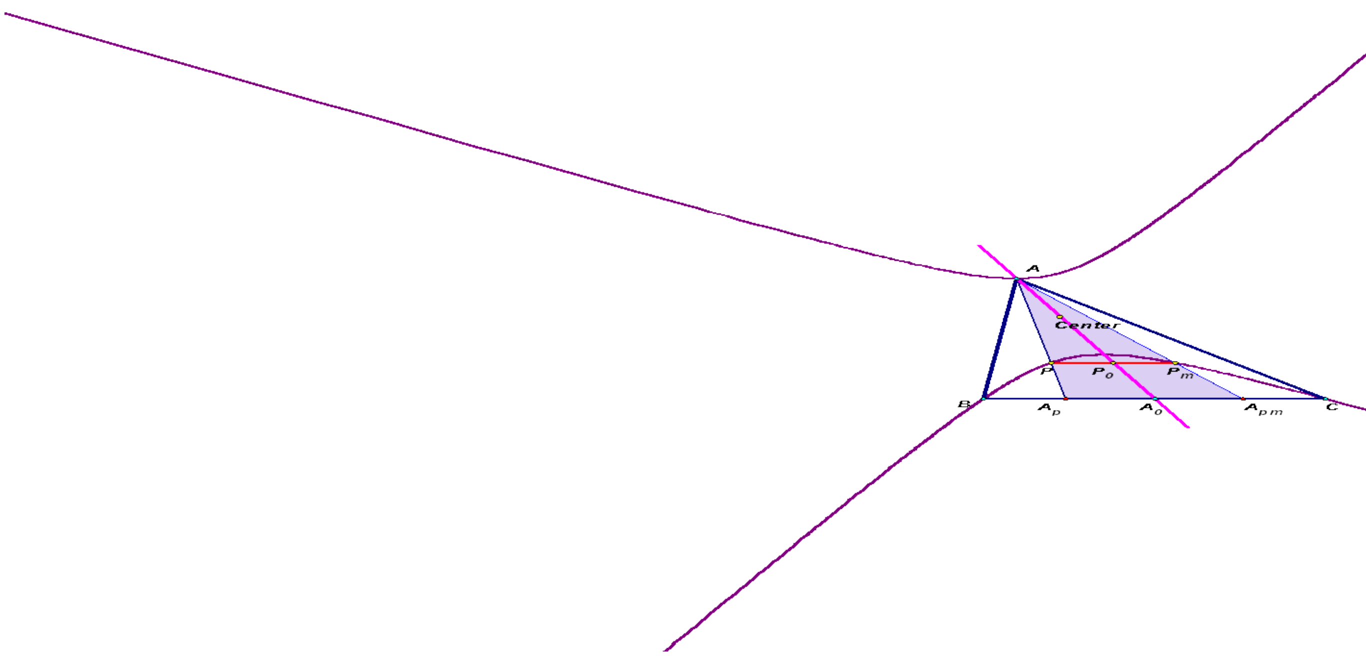
Es una hipérbola rectangular circunscrita que pasa por el incentro *I* y el ortocentro *H*. Además pasa por el punto de Gergonne *J* y el de Nagel *N*. El conjugado isogonal de la hipérbola de Feuerbach es la *recta OI* (que es tangente a la hipérbola en el incentro *I*) y el conjugado isotómico es la *recta de* Gergonne (ver **2.e**).
El centro de la hipérbola de Feuerbach es el punto de Feuerbach *F*.(vere **2.d**)

$\bigvee$



3. Las soluciones.

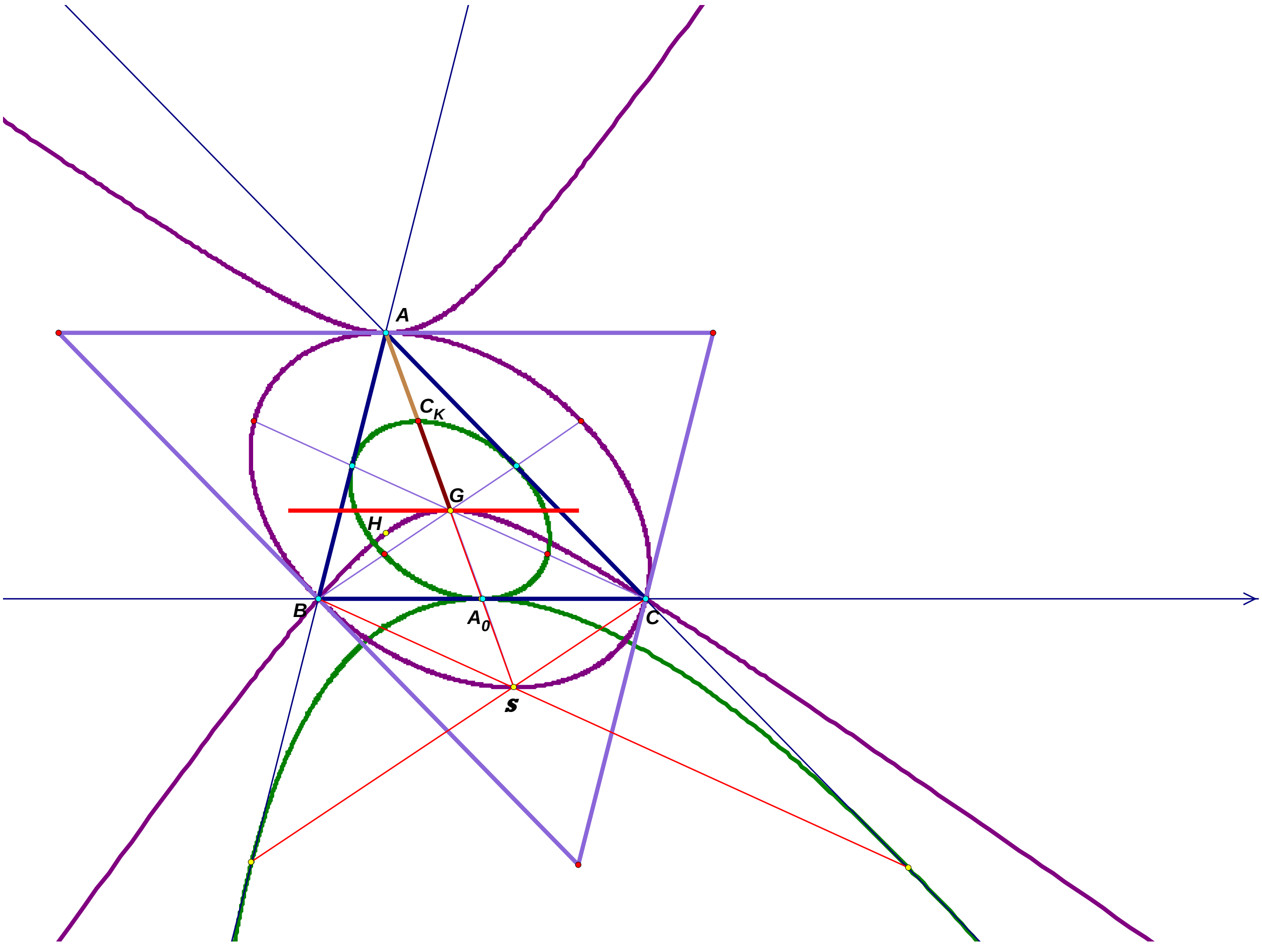
Ahora estamos en disposición de resolver los problemas planteados al principio, en la sección **1**.
Comenzaremos con el siguiente
Lema:



Seant P y P_m un par de puntos conjugados isotómicos con respect al triángulo ABC. Entonces la *recta* PP_m *es paralela a la recta* BC *si y solamente si el centro de la cónica circunscrita que pasa por* P *y* P_m *está en la mediana* AA_0 *.*

Demostración:
De acuerdo con **2.g**, cinco puntos del plano determinan una cónica, luego existe una cónica que pasa por A,B,C,P,P_m. Supongamos que la recta PP_m es paralela a la recta BC. Sean A_P y $A_{P\,m}$ los puntos de intersección de las rectas AP y AP_m, respectivamente. Esos puntos son simétricos con respect al punto A_0 - punto medio del segmento BC. Luego A_0 es también el punto medio del segmento $A_P A_{P\,m}$. Se sigue que P_0 - el punto de intersección de la mediana AA_0 y la recta PP_m - es el punto medio del segmento PP_m. Obviamente, tenemos dos cuerdas paralelas de la cónica, con A_0 y P_0 como sus puntos medios. Por lo tanto (por **2.g**) el centro de la cónica está sobre la mediana AA_0.
La demostración del recíproco es similar.
□
Volviendo ahora a los problemas 1 y 2, obsérvese primero que en el caso de un *triángulo isósceles* (por ejemplo, con $AB = AC$) las rectas *JN* y *GK* coinciden con la mediatriz de *BC*, **lo que excluye cualquier paralelismo**.

Solución del problema 1
Por **2.b**, el punto de Gergonne J y el de Nagel N son conjugados isotómicos. La cónica circunscrita que pasa por esos puntos es la *hipérbola de Feuerbach*, con el *punto de Feuerbach* como centror.(por **2.i**)
Y, por el *Lema*, hemos terminado.
□
Solución del problema 2.
Por ejemplo, supongamos que la recta *GK* es paralela a la recta *BC*. Ahora consideramos la hipérbola de Kiepert. Según **2.i**, la recta de Lemoine *GK* es tangent a la hipérbola en el baricentro *G*. Usando de nuevo el *Lema* (en el caso en que los puntos P y P_m coinciden con el baricentro G), obtenemos que la recta *GK* es paralela a la recta $BC \Leftrightarrow$ el centro de la hipérbola de Kiepert C_K está en la mediana AA_0 (que contiene a *G*). Pero, por **2.i**, los puntos $\mathbf{S}$, G, C_K están alineados.
□
Solución del problema 3
Supongamos que la hipérbola de Kiepert es tangente a la circun-elipse de Steiner del triángulo *ABC*. Entonces el punto de tangencia coincide con uno de los vertices del triángulo, por ejemplo A (pues aquí tenemos tres vertices del triángulo y un par de puntos coincidentes en el punto de tangencia).
Obsérvese que la recta tangent a la circun-elipse en el vértice A es paralela a *BC* (como el lado correspondiente del triángulo anticomplementario). Entonces esa recta es también tangent a la hipérbola de Kiepert. Ahora tenemos la cuerda de la hipérbola – el segmento BC con su punto medio A_0. Se sigue que el centro C_K está en la mediana AA_0 (en el caso degenerado de la tangent el punto medio de la segunda cuerda coincide con el punto de tangencia). Por la colinealidad de los puntos $\mathbf{S}$, G, C_K resulta que el punto de Steiner $\mathbf{S}$ está en la mediana AA_0.
Queda por señalar que el perspector de la parábola de Kiepert es el punto de Steiner $\mathbf{S}$.(ver **2.i**)
La demostración del recíproco es similar.



Referencias:

[1] *Kimberling C.* Encyclopedia of triangle centers “ETC”. [http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/].
[2] *Kimberling C.* Triangle centers and central triangles. Winnipeg: Utilitas Mathematica Publ., 1998.
[3] *Yiu P.* Introduction to the Geometry of the Triangle. [http://www.math.fau.edu/yiu/geometry.html]

Autores:

Evgeniy D. Kulanin,
lucas03@mail.ru

Alexei G. Myakishev,
alex_geom@mtu-net.ru