PROBLEMA 211, propuesto por Carlos Hugo Olivera Díaz, Lima, Perú.

Se da un triángulo ABC y la circunferencia exinscrita relativa al lado AC. Se traza la recta que pasa por el vértice B y por el punto de tangencia, N, de dicha circunferencia con el lado AC. La recta BN vuelve a cortar en P a la circunferencia exinscrita. Sean D y E los otros puntos de tangencia de dicha circunferencia con las rectas que contienen a los lados BC y AB, respectivamente. M es el punto medio de la cuerda ED. Hallar $\angle BPM$ en función de los elementos del triángulo ABC.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Denotemos por I_b al centro de la circunferencia exinscrita relativa al lado AC, y por Q al punto donde se cortan las rectas AC y DE; si estas dos rectas no se cortan, entonces AC es perpendicular a la bisectriz BM ya que DE lo es, con lo que ABC es isósceles en B, la mediatriz es eje de simetría y N coincide con el punto donde ésta corta a AC, y $\angle BPM = 0$ por estar P, M sobre dicha bisectriz. Supondremos en el resto de la solución que ABC no es isósceles, y sin pérdida de generalidad $\angle A > \angle C$, luego en efecto Q existe y está bien definido.

Demostraremos en primer lugar que los puntos I_b, M, N, P, Q son concíclicos. En efecto, consideremos la circunferencia de diámetro I_bQ. Como I_bN es perpendicular a la recta AC, que es la misma que la recta QN, entonces $\angle I_bNQ = 90°$, y N está en dicha circunferencia. Al mismo tiempo, como la recta QM coincide con la recta DE, que por simetría alrededor de la bisectriz del ángulo B es perpendicular a la recta BI_b, que a su vez coincide con la recta MI_b, tenemos que $\angle QMI_b = 90°$, con lo que nuevamente M también está en dicha circunferencia. Finalmente, la potencia de B respecto a la circunferencia exinscrita es $BN \cdot BP = BE^2 = BM \cdot BI_b$, al ser los triángulos BME y BEI_b semejantes, ya que ambos triángulos son rectángulos, respectivamente en M y E, y ambos comparten el ángulo $\angle EBM = \angle I_bBE = \frac{B}{2}$. Se tiene entonces que I_bMNP es cíclico, y su circunferencia circunscrita, que es claramente la de I_bMN, pasa por Q al estar M, N en la circunferencia de diámetro I_bQ.

Nos basta ahora con observar que $\angle BPM = \angle NPM = \angle NQM = \angle AQM$, es el ángulo formado por las rectas AC y EQ. Como $A > C$, se tiene que $\angle EAQ = 180° - A$, mientras que $\angle AEQ = \angle BED = 90° - \frac{B}{2}$, luego

$$\angle BPM = \angle AQE = 180° - \angle EAQ - \angle AEQ = A + \frac{B}{2} - 90° = \frac{A - C}{2}.$$

En el caso en que ABC sea isósceles en B, esta relación nos da el resultado, justificado al principio de esta solución, de $\angle BPM = 0$.