Problema 213. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Texas, USA.

Tenemos que $b_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}}, b_3 = \frac{1}{\frac{3}{8}}, b_4 = \frac{1}{\frac{21}{64}}$ de donde en general se va a cumplir que

$$b_n = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)} \quad n \geq 2$$

lo cual puede ser probado por inducción usando la relación de recurrencia. Entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{L}$ donde $L = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$. Este producto infinito converge si y solo si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$ converge, la cual es una serie de términos negativos que convergerá si y solo si la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}}\right)$ converge. Lo cual es verdad dada la cadena de desigualdades siguiente:

$$\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}}\right) \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2^k}} - 1 = \frac{1}{2^k - 1} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

notar que estaríamos comparando con una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$. Sobre L se puede encontrar información en `http://mathworld.wolfram.com/TreeSearching.html`, ver fórmulas $(19) - (25)$, tenemos que $L = 0.2887880950$ de donde el límite de b_n es igual a $3.4627466204934798299078083533 88$; para esta constante en particular ver $A065446$ en On-line Encyclopedia of Integer Sequences.