Problema 215 (modificado)

Proposto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España.

Sexan $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ tres números complexos cuxo módulo é a unidade, e $A,\ B,\ C$ os puntos do plano dos que son afixos. Sean $A'B'C'$ e $A''B''C''$ os triángulos órtico e tanxencial de ABC. Demostrar que $A'B'C'$ e $A''B''C''$ son homotéticos e que se cumpre a relación

$$\frac{B'C'}{B''C''}=-\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{4\alpha\beta\gamma}.$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Supoñendo que a notación é tal que $A'\in BC$, e $B'\in CA$, e $C'\in AB$, sexan α', β', γ', α'', β'', γ'' os afixos de A', B', C', A'', B'', C''.

Ao ter $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ módulo a unidade, $A,\ B,\ C$ distan dita unidade da orixe, co cal A, B, C están situados sobre a circunferencia de centro a orixe e raio a unidade, que coincidirá, por conter aos seus vértices, coa circunferencia circunscrita ao triángulo ABC.

O feito de que $A'B'C'$ e $A''B''C''$ son homotéticos xa aparece demostrado na propiedade 6 de http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero37/ortico.pdf, extraída do libro *College Geometry, An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, de Nathan Altshiller-Court, co cal chegará con demostrar a relación proposta no enunciado.

Como B' é o pé da perpendicular trazada desde B á corda CA da circunferencia de centro a orixe e raio unidade, e como $1=|\beta|^2=\beta\overline{\beta}$, resulta

$\beta'=\frac{1}{2}\left(\gamma+\alpha+\beta-\gamma\alpha\overline{\beta}\right)=\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta+\gamma-\frac{\gamma\alpha}{\beta}\right)$; e analogamente,

$\gamma'=\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\overline{\gamma}\right)=\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta+\gamma-\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$, co cal

$$B'C'=\gamma'-\beta'=\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma\alpha}{\beta}-\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)=\frac{\alpha(\gamma+\beta)(\gamma-\beta)}{2\beta\gamma}.$$

Como B'' é a intersección das tanxentes á circunferencia de centro a orixe e raio unidade trazadas desde C e A, $\beta''=\frac{2\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}$; e analogamente, $\gamma''=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, co cal

$B''C''=\gamma''-\beta''=\frac{2\alpha[\beta(\gamma+\alpha)-\gamma(\alpha+\beta)]}{(\alpha+\beta)(\gamma+\alpha)}=\frac{2\alpha^2(\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta)(\gamma+\alpha)}$, sendo entón

$$\frac{B'C'}{B''C''}=\frac{\frac{\alpha(\gamma+\beta)(\gamma-\beta)}{2\beta\gamma}}{\frac{2\alpha^2(\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta)(\gamma+\alpha)}}=\frac{\alpha(\gamma+\beta)(\alpha+\beta)(\gamma+\alpha)(\gamma-\beta)}{4\alpha^2\beta\gamma(\beta-\gamma)}=-\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{4\alpha\beta\gamma}.$$