SOBRE LA DESIGUALDAD DE CAUCHY

Un enfoque heurístico y algunas aplicaciones

Francisco Bellot Rosado

En muchos problemas de concursos se puede utilizar la desigualdad de Cauchy como herramienta para demostrar desigualdades.

En esta nota voy a exponer la forma en que a mí, personalmente, me gusta presentar la desigualdad a alumnos de 14 – 15 años de edad en adelante. Descarto, por la edad de los alumnos, el enfoque vectorial habitual con la utilización del producto escalar; emplearé la identidad de Lagrange, pero no la voy a presentar "caída del cielo" ni despacharla diciendo (como he llegado a leer en algún texto) que "se demuestra haciendo operaciones y desarrollando ambos miembros".

La identidad de Lagrange

Queremos comparar las dos expresiones siguientes:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \qquad (1)$$

y

$$\left(ax+by+cz\right)^2 \qquad (2)$$

con objeto de saber cuál de las dos será mayor. Aquí, los seis números involucrados son números reales cualesquiera. Pido a los alumnos que desarrollen por separado (1) y (2) :

$$(1) = a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2$$

$$(2) = a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz$$

A la vista del resultado obtenido, y si es preciso con algunos ejemplos numéricos, conjeturamos que (1) debe ser mayor o igual que (2); para demostrar esto de forma concluyente vamos a ver si conseguimos expresar (1) como una suma, uno de cuyos sumandos sea (2) y los demás sean positivos. Para que esto sea así, procuraremos que los otros sumandos sean cuadrados, y además que los términos que están en (1) pero no en (2) aparezcan en la suma – y se simplificarán – y los dobles productos, que están en (2) pero no en (1), se simplifiquen directamente apareciendo con signo opuesto en los desarrollos de los cuadrados:

Propongo, entonces, a los alumnos, que completen adecuadamente

$$\left(ax+by+cz\right)^2+(\cdots-\cdots)^2+(\cdots-\cdots)^2+\left(\cdots-\cdots\right)^2$$

y que escriben como

$$\left(ax+by+cz\right)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+\left(cx-az\right)^2.$$

Hemos llegado, de esta forma a la identidad

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(ax+by+cz\right)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+\left(cx-az\right)^2$$

que recibe el nombre de Lagrange (para tres variables, pero que es fácilmente generalizable a más) y que, "como subproducto", demuestra la desigualdad

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\left(ax+by+cz\right)^2,$$

que es la desigualdad de Cauchy.

El caso de igualdad

¿Cuándo valdrá el signo igual en la desigualdad de Cauchy?

Los alumnos, después de reflexionar un poco, dicen: *cuando sean 0 los tres cuadrados suplementarios del segundo miembro de la identidad.*

Esto se formula como

$$ay-bx=bz-cy=cx-az=0$$

que se expresa de forma más compacta en forma de proporción:

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z},$$

es decir, cuando las tres primeras variables sean proporcionales a las tres segundas.

Algunos comentarios

En la excelente monografía de J. Michael Steele *The Cauchy-Schwarz Master Class, Cambridge U.P. & M.A.A. 2004* se afirma que el procedimiento que hemos utilizado es el que describe Cauchy en su libro de texto para los alumnos de la Escuela Politécnica de Francia (1821).

En la bibliografía rusa, se suele añadir el nombre de Buniakovski a los de Cauchy y Schwarz. En realidad, Schwarz y Buniakovski desarrollaron, independientemente uno de otro, una generalización de la desigualdad de Cauchy para cálculo integral.

La formulación generalizada de la desigualdad es

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2,$$

valiendo el signo igual si y sólo si las variables a_i y b_i son proporcionales, es decir, si existe

$$\lambda \text{ tal que } \lambda=\frac{a_i}{b_i},$$

Cualquiera que sea $i, 1\leq i\leq n$.

Para generalizar el argumento anteriormente usado en la identidad de Lagrange, hay que observar que a la expresión

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2$$

es necesario sumarle los *n(n-1)/2* cuadrados

$$\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2+\left(a_1b_3-a_3b_1\right)^2+\cdots+\left(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1}\right)^2$$

número que coincide con el de formas de elegir dos subíndices distintos de entre los *n.* Con esto, se obtiene el primer miembro de la identidad de Lagrange para *n* variables.

Aplicaciones

El primer ejemplo que vamos a ver procede de una pequeña obra maestra: *Maxima and Minima without Calculus,* de Ivan Niven (M.A.A. 1981).

Ejemplo 1

Hallar los valores máximo y mínimo de 2x+3y+6z para valores de x,y,z que satisfacen $x^2+y^2+z^2=1$.

Solución

Por la desigualdad de Cauchy para 3 variables, con a = 2, b=3, c = 6 obtenemos

$$\left(2^2+3^2+6^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\left(2x+3y+6z\right)^2,$$

con igualdad si y sólo si

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}.$$

Pero sobre la esfera $x^2+y^2+z^2=1$, se tiene

$$49 \ge (2x+3y+6z)^2,$$

lo cual significa que

$$-7 \le 2x+3y+6z \le 7.$$

El problema estará terminado cuando encontremos efectivamente puntos sobre la esfera donde se verifique el signo igual. Para ello resolvemos el sistema formado por la ecuación de la esfera junto con las dos condiciones

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}.$$

Así obtenemos los valores

$$(x,y,z)\equiv\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right) \text{ y} \left(\frac{-2}{7},\frac{-3}{7},\frac{-6}{7}\right).$$

Por lo tanto, el mínimo valor es -7 y el máximo 7.

Ejemplo 2

(del libro de Mircea Becheanu y Bogdan Enescu *Inegalitati elementare...si mai putin elementare*, Ed. Gil, 2002)

Si a,b,c son números reales tales que a + b + c = 1, demostrar que

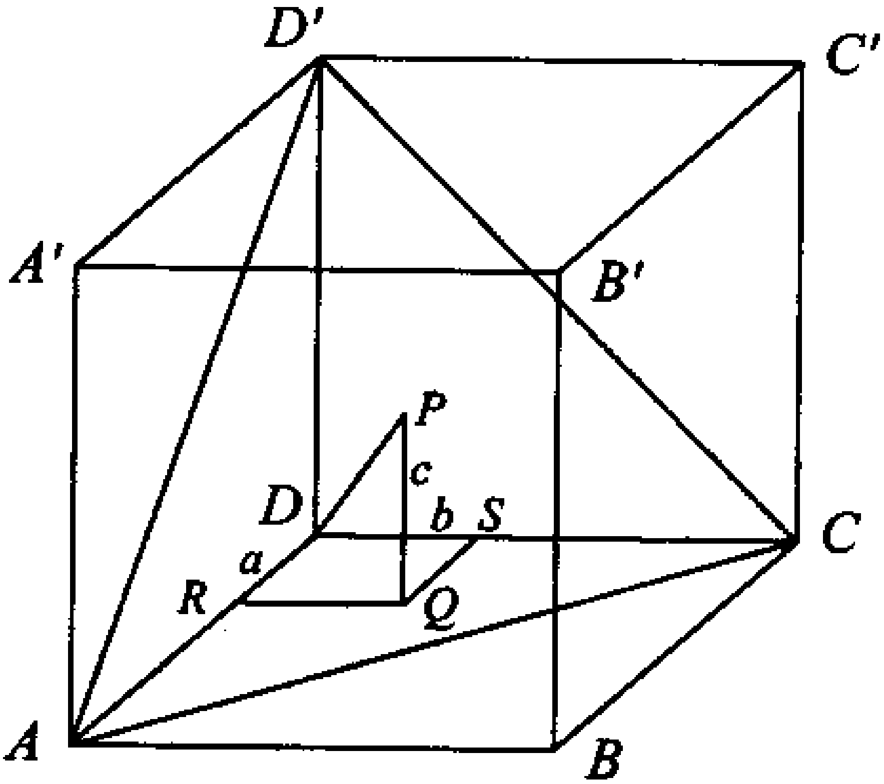
$a^2+b^2+c^2$ es mayor o igual que 1/3.

Solución

Aplicamos la desigualdad de Cauchy en la forma

$$1^2=(1\bullet a+1\bullet b+1\bullet c)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

La desigualdad que acabamos de demostrar tiene una interpretación geométrica interesante:



Consideremos el cubo ABCDA'B'C'D' de lado 1 y sea P un punto interior situado en el plano ACD'. El punto P se proyecta en el plano ABCD en Q, y Q se proyecta sobre las aristas AD y CD en los puntos R y S, respectivamente. Supongamos que DR = a, DS = b, PQ = c. Entonces

$$DP^2 = a^2 + b^2 + c^2 .$$

Por otra parte, el volumen del tetraedro DACD' se puede expresar de dos maneras:

$$V = \frac{1}{3} DD' \bullet S_{ADC} = \frac{1}{3} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ o bien } V = \frac{1}{3} S_{AD'C} \bullet h,$$

donde h es la distancia de D al plano AD'C. Ya que $S_{AD'C} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, resulta que

$h = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Puesto que $DP^2 \geq h^2$, la desigualdad propuesta expresa el siguiente resultado geométrico: la distancia del vértice D del cubo a un punto P interior al triángulo AD'C es mayor o igual que $\frac{\sqrt{3}}{3}$. La distancia mínima tendrá lugar cuando los vértices PDRQS sean vértices de un cubo.

Ejemplo 3

Si a, b, c son números positivos, demostrar que

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$$

Solución

Como a,b,c son estrictamente positivos, podemos considerar los números (también positivos) $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ y aplicar la desigualdad de Cauchy:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right)$$

$$\geq\left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2=9.$$

Ejemplo 4

Si a,b,c son números reales positivos, entonces

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

Solución

Escribimos el segundo miembro astutamente:

$$\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b}+\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\leq\sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)}=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}.$$

Ejemplo 5 (La desigualdad de Nesbitt)

Si a, b, c son números positivos, entonces

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Solución

Obsérvese la forma en que se invoca aquí la desigualdad de Cauchy:

$$\left[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right]\cdot\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\geq(a+b+c)^2$$

De esta desigualdad se obtiene

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2\left(ab+bc+ca\right)}=1+\frac{a^2+b^2+c^2}{2\left(ab+bc+ca\right)}$$

Pero como es bien conocido que $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, resulta

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Bibliografía

M.Becheanu, B. Enescu: ***Inegalitati elementare…si mai putin elementare. Ed. Gil, Zalau, 2002.***

J.Michael Steele: ***The Cauchy-Schwarz Master Class, Cambridge U.P. & M.A.A.2004.***

I Niven: ***Maxima and Minima without Calculus. M.A.A. 1981.***