PMN43-2

Propuesto por Carlos Hugo Olivera Díaz, Lima, Perú.

O triángulo ABC é rectángulo en B, e sexa r o raio do seu círculo inscrito. As bisectrices interiores dos ángulos en A e en C cortan aos seus lados opostos en N e M, respectivamente. Calcular a área do triángulo BMN en función de r.

Solución por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sexan I o incentro do triángulo ABC, A', B' e C' os puntos de tanxencia da circunferencia inscrita ao triángulo ABC cos lados BC, CA e AB, respectivamente, a, b e c as respectivas lonxitudes de ditos lados, p o semiperímetro e R o raio do círculo circunscrito a ABC, n a lonxitude de BN, m a lonxitude de BM e $[\ldots]$ a área do triángulo que se encerre entre corchetes. Nótese que N pertence á bisectriz interior AI e que M pertence á bisectriz interior CI, col cal tanto A, I e N, coma C, I e M, están aliñados.

Polo teorema da bisectriz interior AN do triángulo ABC, $\frac{NC}{NB}=\frac{AC}{AB}$, é dicir, $\frac{a-n}{n}=\frac{b}{c}$, co cal $n=\frac{ca}{b+c}$; analogamente, $m=\frac{ca}{a+b}$.

Como o ángulo no vértice B do triángulo ABC é recto, resulta que dito triángulo está inscrito na circunferencia de diámetro BC, sendo polo tanto dita circunferencia a circunscrita ao mesmo, co cal $R=\frac{b}{2}$. Ademais, $pr=[ABC]=\frac{ca}{2}$ e $\frac{a-b+c}{2}=BA'=C'I=r$ e, segundo a igualdade $ab+bc+ca=r^2+p^2+4Rr$, demostrada na páxina 29 do número 29 desta revista,

$$(a+b)(b+c)=ab+bc+ca+b^2=r^2+p^2+4Rr+b^2=r^2+p^2+2br+b^2=(b+r)^2+p^2=2p^2,$$

de onde resulta $[BMN]=\frac{mn}{2}=\frac{c^2a^2}{2(a+b)(b+c)}=\frac{(2pr)^2}{4p^2}=r^2.$