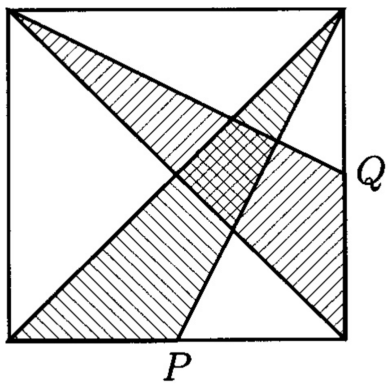
PMN43-3

Enviado por Juan Jesús Moncada Bolón, San Francisco de Campeche, México.

Na figura, P e Q son os respectivos puntos medios dos lados dun cadrado.



Determinar o cociente entre a área da rexión dobremente sombreada e a área do cadrado.

Resolto por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sexan $30a$ a lonxitude do lado do cadrado, A, B, C e D os vértices do cadrado dados en sentido antihorario, de tal xeito que $P \in AB$ e $Q \in BC$, R a intersección de DB e PC, S a intersección de DQ e PC, T a intersección de DQ e AC, U a intersección de DB e AC, que é o centro do cadrado, e $[\ldots]$ a área do polígono que se encerre entre corchetes.

Fixada a referencia de orixe U na cal as coordenadas de P e Q son, respectivamente, $P(0,-15a)$ e $Q(15a,0)$, terase que $A(-15a,-15a)$, $B(15a,-15a)$, $C(15a,15a)$ e $D(-15a,15a)$. Así, R obtense como intersección das rectas $PC: y = 2x - 15a$ e $DB: y = -x$, é dicir, $R(5a,-5a)$, S obtense como intersección das rectas $PC: y = 2x - 15a$ e $DQ: y = \frac{15a - x}{2}$, é dicir, $S(9a,3a)$, e T obtense como intersección das rectas $AC: y = x$ e $DQ: y = \frac{15a - x}{2}$, é dicir, $T(5a,5a)$, co cal

$$[RSTU] = [RST] + [TUR] = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5a & 9a & 5a \\ -5a & 3a & 5a \end{pmatrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5a & 0 & 5a \\ 5a & 0 & -5a \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|40a^2\right| + \frac{1}{2}\left|-50a^2\right| = 45a^2,$$

logo o cociente pedido é $\frac{[RSTU]}{[ABCD]} = \frac{45a^2}{900a^2} = \frac{1}{20}$.