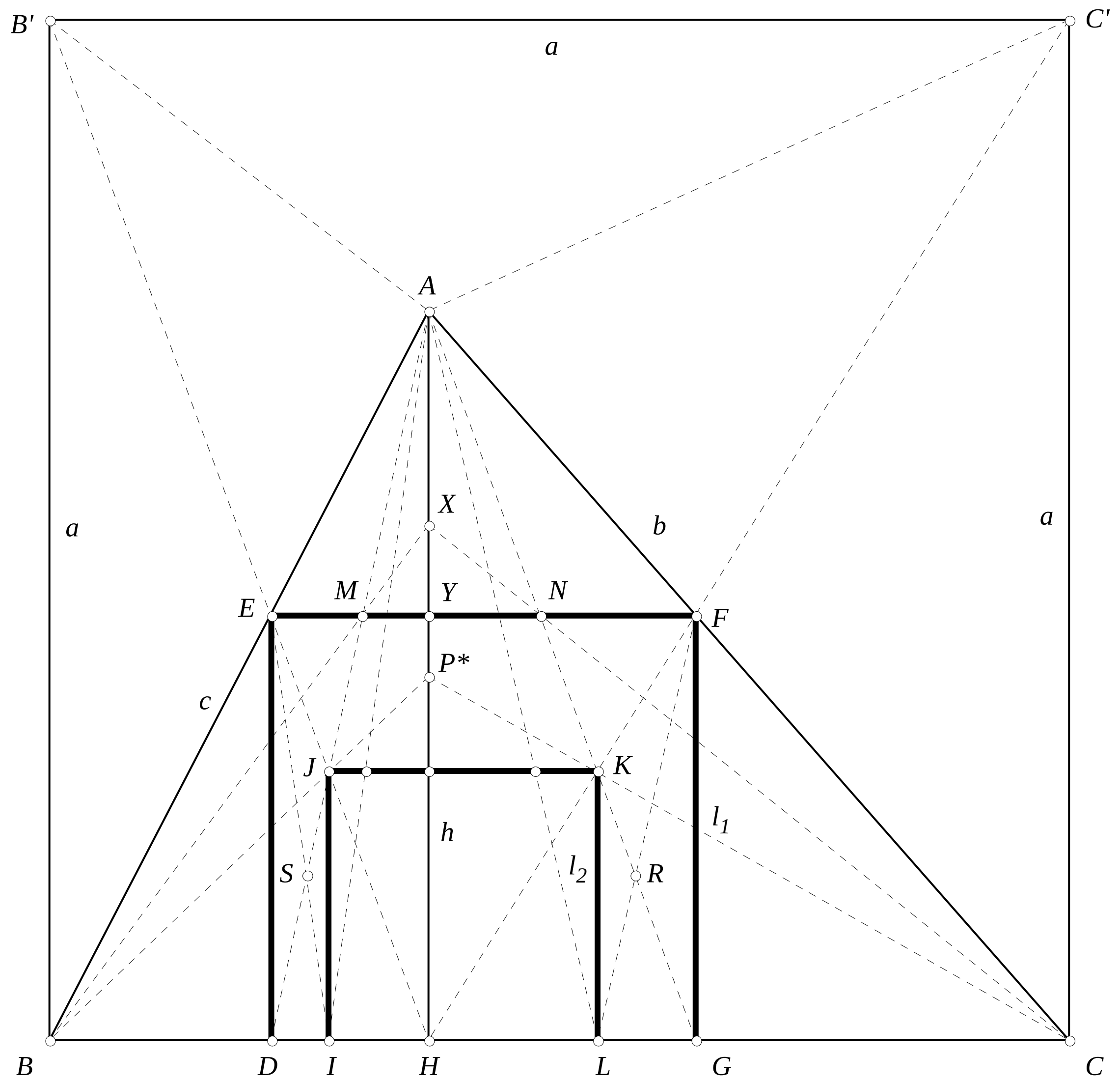
Problema 212.
Solución:
La figura (necesariamente grande) recoge todos los extremos del enunciado.



Detallaremos la construcción del cuadrado inscrito *EDGF* ya que se va a reiterar y explica por sí sola algunos de los apartados del problema.
Se construye un cuadrado *BCC'B'* de lado *a*, las intersecciones de las rectas que unen *H* con los vértices B', *C'* determinan los puntos *E* y *F* que se proyectan sobre el lado *BC* en *D* y *G*.
Claramente los cuadrados *BCB'C'* y *FGEF* son homólogos en la homotecia de centro *H*.
Por el uso reiterado que vamos a hacer, vamos a recordar una propiedad elemental de los trapecios que por comodidad la llamaremos propiedad T.
T.- Si en un trapecio de bases *a* y *b* trazamos la paralela a las bases por el punto de intersección de las diagonales, la medida del segmento que intercepta con los lados no paralelos es la media armónica de *a* y *b* y su punto medio es el de intersección de las diagonales. (La demostración es sencilla).
Llamando l_1 al lado del cuadrado inscrito *EDGF*, aplicando la propiedad T al trapecio *AHCC*',

$$l_1 = \frac{1}{2}\frac{2ah}{a+h} = \frac{ah}{a+h}$$

Si repetimos la construcción inscribiendo un cuadrado en el triángulo *ADG* con la misma altura *AH*, obtenemos el cuadrado *ILKJ* cuyo lado l_2 vale por la propiedad T en el trapecio *AHGF*:

$$l_2=\frac{1}{2}\frac{2l_1h}{l_1+h}=\frac{\frac{ah^2}{a+h}}{\frac{ah}{a+h}+h}=\frac{ah}{2a+h}.$$

Con esto queda resuelto el apartado i).
ii) Simetrizando las rectas *EI* y *FL* respecto de la recta *BC*; basta probar que la recta *IJ* es la bisectriz del ángulo *EIA* y que la recta *KL* es la bisectriz de *ALF*.
Detallamos el cálculo para uno de los casos, el otro es análogo:
Llamando $k=\frac{b\cos C}{a}$, claramente $HG=kl_1,\ HL=kl_2,\ HC=ka$.
Llamando $k'=\frac{c\cos B}{a}$, claramente $HD=k'l_1,\ HI=k'l_2,\ HB=k'a$.
Entonces, *KL* es la bisectriz de *ALF* es equivalente a probar que $\frac{FG}{GL}=\frac{h}{HL}$ y, por lo anterior,

$$\frac{FG}{GL}=\frac{h}{HL}\Leftrightarrow\frac{l_1}{\left(l_1-l_2\right)k}=\frac{h}{l_2k}\Leftrightarrow\frac{l_1+h}{l_1}=\frac{h}{l_2}\Leftrightarrow 1+\frac{h}{l_1}=\frac{h}{l_2}$$

Sustituyendo los valores de l_1, l_2 y operando, los dos miembros de la última igualdad valen $2+\frac{h}{a}$.
iii) Si *P** es el punto medio de *AH* y hacemos la construcción del punto i) para inscribir un cuadrado en el triángulo *P*BC* con la misma base y altura mitad, obtenemos el cuadrado *ILKJ* ya que

$$JK=l_2=\frac{ah}{2a+h}=\frac{a\frac{h}{2}}{a+\frac{h}{2}}$$

Esto demuestra el apartado iii).
iv) Vamos a calcular *HX* como intersección de la recta *CN* con *AH*.
Por la semejanza de los triángulos *AHG* y *XYN*, y teniendo en cuenta que $\frac{h-l_1}{h}=\frac{l_1}{a}$, se tiene

$$\frac{YN}{h-l_1}=\frac{kl_1}{h}\Leftrightarrow YN=\frac{kl_1\left(h-l_1\right)}{h}=\frac{kl_1^2}{a}.$$

Por la semejanza de los triángulos *XHG* y *XYN*, resulta

$$\frac{XH}{ka}=\frac{XH-l_1}{YN}=\frac{l_1}{ka-YN}\Rightarrow XH=\frac{l_1\cancel{k}a}{\cancel{k}a-\frac{\cancel{k}l_1^2}{a}}=\frac{a^2l_1}{a^2-l_1^2}$$

Expresión que no depende del factor *k*.
Si calculásemos *HX* como intersección de la recta *BM* con *AH*, repetiríamos el cálculo cambiando el triángulo *XYN* por *XYM*, …,el factor *k* por *k’* y sale el mismo valor, lo que demuestra el punto iv).
v) De nuevo por la propiedad T aplicada a los trapecios *KLGF* y *EDIJ* ambos de bases l_1,l_2 resulta que los puntos *R* y *S* están a la misma distancia de la recta *BC* y por tanto *JK*, *SR* y *DG* son paralelos y la semejanza es trivial.