Problemas 216 - 220

Problema 216

(*Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)*

Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ una función continua. Con la notación $f^n(a)$ denotamos $(f(a))^n$.

Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n-1}{k}}{n-k}f^n\left(\frac{k}{n}\right).$$

Problema 217

(*Propuesto por D.M.Batinetu-Giurgiu, Bucarest, y N. Stanciu, Buzau, Rumania)*

Sean m y n números reales positivos. Demostrar que para cualquier triángulo ABC se verifican las desigualdades

1)

$$\frac{ab^2}{ma+nb}+\frac{bc^2}{mb+nc}+\frac{ca^2}{mc+na}\geq\frac{\left(s^2+r^2+4Rr\right)^2}{(2m+n)\,s^2+(n-2m)\,r^2+4\,(n-2m)\,Rr}$$

y 2)

$$\frac{1}{(mr_a+nr_b)^2}+\frac{1}{(mr_b+nr_c)^2}+\frac{1}{(mr_c+nr_a)^2}\geq\frac{27}{(m+n)^2\,(4R+r)^2}$$

donde las notaciones del triángulo son las usuales.

Problema 218

(Propuesto por el editor)

La tangente en P a una cierta curva corta al eje Ox en T. PN es la perpendicular desde P a dicho eje. Si el perímetro del triángulo PTN es constante e igual a $2c$, demostrar que la ecuación de la curva es de la forma

$$y^2-2cy=Ae^{\frac{x}{c}}.$$

Problema 219

(Propuesto por el editor)

ABC es un triángulo. Se trazan círculos de centros A y B que pasan por C. Demostrar que el producto de las distancias desde C a las tangentes comunes a ambas circunferencias es

$$\frac{4\,(s-a)^2\,(s-b)^2}{c^2}.$$

Problema 220

(Propuesto por el editor)
Si la sucesión $\{u_j\}$se define mediante

$$\begin{aligned} u_{2n} &= u_{2n-2} + u_n - u_{n-8} \text{ para } n > 8; \\ u_{2n} &= u_{2n-2} + u_n \text{ para } n < 8; \\ u_{2n+1} &= u_{2n} \text{ y } u_1 = u_0 = 1, \end{aligned}$$

demostrar que

$$u_{8n} = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$$