## PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES 44

## CINCO PROBLEMAS DE LA OLIMPIADA DE BIELORRUSIA 2009

### PMJ-44-1

La gráfica de la parábola $y = x^2$ se dibuja en el plano cartesiano. Dos rectas $r_1$ y $r_2$ son paralelas al eje de abscisas; la distancia entre ellas es 1, y $r_1$ está más cerca del eje de abscisas que $r_2$. El punto A es uno de los puntos de intersección de la parábola con $r_1$; el punto B es el punto de intersección de $r_2$ con el eje de ordenadas, y O es el origen de coordenadas. Calcular el valor del ángulo OAB. (I. Voronovich)

### PMJ-44-2

Sean un número primo $p>3$ y los enteros positivos *k* y *n.* Designamos con $S_p(k,n)$ la suma de todas las fracciones irreducibles de la forma m/p tales que $k<\frac{m}{p}<n$. Hallar todos los números *p,k,n* tales que $S_p\left(k,n\right)=2009$. (V.Karamzin)

### PMJ-44-3

En el trapecio ABCD (con BC paralela a AD), el ángulo CAD es de 30º. La longitud de la diagonal BD es igual a la longitud de la paralela media del trapecio. Calcular el valor del ángulo entre las diagonales AC y BD. (I. Voronovich)

### PMJ 44-4

Tom y Jerry juegan de la siguiente manera: Cada uno, por turno, reemplazan uno de los asteriscos de la expresión ********* por una cifra del 1 al 9 (cada cifra sólo se puede utilizar una vez). Una vez terminado, Tom gana si el número de 9 cifras así formado es divisible por 11; si no lo es, gana Jerry. ¿Quién de los jugadores tiene estrategia ganadora si i) Tom empieza el juego; ii) Jerry empieza el juego? (E.Barabanov, S. Mazanik, I. Voronovich)

### PMJ-44-5

Se consideran 15 trinomios cuadráticos con coeficientes distintos dos a dos:

$x^2-p_ix+q_i,\ \ i=1,2,\cdots,15$. El conjunto de valores de los coeficientes de esos trinomios es $\{1,2,\cdots,29,30\}$. Una raíz de uno de esos trinomios se dirá *buena* si esa raíz es mayor que 20. Sea M el número total de raíces *buenas* de esos quince trinomios. Determinar el mayor valor posible de M. (I. Bliznets)