Competición Matemática Mediterránea 2011

PROBLEMA 1

Un polinomio mediterráneo es de la forma

$$P(x) = x^{10} - 20x^9 + 135x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

y sólo tiene raíces reales. Sus coeficientes son reales también. Determinar el mayor número real que puede ser raíz de un polinomio mediterráneo.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Sea r una de las raíces que puede tener un polinomio mediterráneo, y sean $s_1, s_2, \ldots, s_9$ las demás raíces reales de dicho polinomio. Denotemos $S = s_1 + s_2 + \cdots + s_9$, $\sigma = s_1s_2 + s_2s_3 + \cdots + s_8s_9$ y $Q = {s_1}^2 + {s_2}^2 + \cdots + {s_9}^2$. Por la desigualdad entre medias aritmética y cuadrática, y por la desigualdad triangular, tenemos que

$$Q \geq \frac{1}{9}\left(|s_1| + |s_2| + \cdots + |s_9|\right)^2 \geq \frac{S^2}{9},$$

con igualdad si y sólo si $s_1 = s_2 = \cdots = s_9$. Por las relaciones de Cardano-Vieta, tenemos que

$$20 = r+S, \qquad 135 = rS+\sigma = rS+\frac{S^2-Q}{2} \leq rS+\frac{4S^2}{9} = r(20-r)+\frac{4(20-r)^2}{9},$$

con lo que operando, se obtiene

$$0 \geq r^2 - 4r - 77 = (r-11)(r+7).$$

Se tiene entonces que ha de ser $-7 \leq r \leq 11$, con lo que los valores mínimo y máximo que puede tener una raíz de un polinomio mediterráneo son -7 y 11, respectivamente, siendo esto posible si y sólo si el resto de las raíces son iguales entre sí, e iguales a 3 en el caso del mínimo, e iguales a 1 en el caso del máximo. Se puede comprobar en efecto fácilmente que tanto $(x+7)(x-3)^9$ como $(x-11)(x-1)^9$ son polinomios mediterráneos.

Competición Matemática Mediterránea 2011

PROBLEMA 2

Sea A un conjunto finito de números reales positivos; sea B el conjunto de números de la forma x/y, siendo x e y elementos de A; y sea C el conjunto de números de la forma xy, siendo x e y elementos de A.

Si representamos con S el número de elementos del conjunto S, demostrar que $|A| \cdot |B| \leq |C|^2$.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Supongamos que todos los elementos de A son distintos, y que tanto dos resultados iguales del cociente como del producto de dos elementos de A se cuentan como un único elemento de B o C, respectivamente (la solución a la alternativa es una versión simplicada, con $D = 0$, de la solución que se expone a continuación).

Supongamos en primer lugar que no existen cuatro elementos de A, x_1, x_2, y_1, y_2 con $x_1 \neq x_2$, y tales que $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \neq 1$ o $x_1 y_1 = x_2 y_2$. Entonces, el número de elementos de B es claramente igual al número de pares ordenados (x, y) que podemos formar con dos elementos distintos cualesquiera de B, es decir $n^2 - n$, más un elemento adicional por todas las parejas de la forma $\frac{x}{x} = 1$, mientras que el número de elementos de C es igual al número de pares no ordenados que podemos formar con dos elementos distintos de A, es decir $\binom{n}{2}$, más n elementos de la forma x^2. Luego $|B| = n^2 - n + 1$ y $|C| = \frac{n(n+1)}{2}$, con lo que el resultado a demostrar es equivalente a

$$4n(n^2 - n + 1) = 4|A| \cdot |B| \leq 4|C|^2 = n^2(n + 1)^2,$$
$$0 \leq n^3 - 2n^2 + 5n - 4 = (n - 1)(n^2 - n + 4),$$

claramente cierto y con igualdad si y sólo si $n = 1$, pues $n^2-n+4 = (n-2)^2+3n > 0$.

Supongamos finalmente que existen cuaternas de elementos de A, x_1, x_2, y_1, y_2 con $x_1 \neq x_2$, y tales que $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \neq 1$ o $x_1 y_1 = x_2 y_2$. Nótese que en el primer caso, se daría $x_1 y_2 = x_2 y_1$ y también $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \neq 1$, mientras que en el segundo caso se daría $\frac{y_2}{x_1} = \frac{y_1}{x_2} \neq 1$ y $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1} \neq 1$. Luego por cada elemento de C que se "pierde" por haber dos productos iguales, existen dos elementos que se "pierden" en B por haber dos pares de cocientes iguales. Llamando D al número de elementos de C que se pierden, tenemos que de B se pierden exactamente el doble, con lo que nos bastaría con demostrar que

$$4n(n^2 - n + 1 - 2D) \leq (n(n + 1) - 2D)^2,$$
$$4D(n^2 - n - D) \leq (n^2 - n)^2 + 4n(n - 1),$$

y esta última desigualdad es claramente cierta, ya que por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, $D(n^2 - n - D) \leq \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2$, con igualdad si y sólo si $D = \frac{n^2-n}{2}$. Nótese que la desigualdad es siempre estricta, a menos que $n = 1$, en cuyo caso $A = \{x\}$ para algún real positivo x, con lo que $B = \{1\}$, $C = \{x^2\}$, y $|A| \cdot |B| = 1 = |C|^2$.

Competición Matemática Mediterránea 2011

PROBLEMA 3

De un tetraedro regular de altura h se corta un tetraedro regular de altura xh por medio de un plano paralelo a la base.

Cuando el tronco de pirámide resultante se coloca en un plano horizontal sobre una de sus caras laterales, la proyección del centro de gravedad G del tronco de cono es un punto de la base menor de esta cara lateral.

Demostrar que x es una raíz de la ecuación $x^3 + x^2 + x = 2$.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Supongamos el tetraedro apoyado en un plano horizontal tal que, al cortarlo, el tronco piramidal quede apoyado sobre una de sus caras laterales; es decir, una vez apoyado el tetraedro con una de sus caras sobre el plano horizontal, lo cortaremos por un plano paralelo a una de sus caras laterales. Llamemos A, B, C a los vértices del tetraedro apoyados sobre el plano horizontal, de forma que el plano que corta al tetraedro es paralelo al lado BC, cortando a las aristas AB, AC en los puntos respectivos B', C'. Si llamamos H a la longitud de la altura de cada cara del tetraedro, la recta $B'C'$ está a una distancia $(1-x)H$ de la arista BC, y a una distancia xH del vértice A.

Al realizar el corte, quedan dos sólidos, un tetraedro regular, una de cuyas caras es $AB'C'$, y cuyo centro de gravedad llamaremos P_1, y un tronco de pirámide una de cuyas caras laterales es $BB'C'C$, y cuyo centro de gravedad llamaremos $P_2 = G$. Nótese que el centro de gravedad del tetraedro es también el centro de gravedad de dos pesos puntuales, uno situado en P_1 con masa x^3, y otro situado en P_2 con masa $1 - x^3$, por ser esta la proporción de volúmenes entre el tetraedro pequeño y el tronco piramidal, en los que queda dividido el tetraedro original. Podemos entonces decir que, para cualquier punto O de la recta P_1P_2 que deja a P_1, P_2 en la misma semirrecta, el centro de gravedad P del tetraedro original está también sobre dicha semirrecta, y cumple

$$OP = x^3 \cdot OP_1 + (1 - x^3) \cdot OP_2.$$

Sean ahora Q_1, Q_2, Q, O' las proyecciones respectivas de P_1, P_2, P, O sobre el plano horizontal, y tomemos sin pérdida de generalidad O' como el punto medio de BC. Claramente, el centro de gravedad de ambos tetraedros estará en el centro de sus respectivas bases, es decir, sobre la altura de dicha base, a una distancia de la base igual a un tercio de la altura. Luego $O'Q_1 = (1-x)H + \frac{xH}{3}$, $O'Q = \frac{H}{3}$. Pero el punto Q_2 es, por definición en el enunciado, el punto medio de $B'C'$, con lo que $O'Q_2 = (1-x)H$. Se tiene entonces que, al ser $O'Q = x^3 \cdot O'Q_1 + (1-x^3) \cdot O'Q_2$ por el teorema de Thales, se cumple

$$1 = x^3(3-2x) + 3(1-x^3)(1-x), \qquad 0 = x^4 - 3x + 2 = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 2).$$

Ahora bien, $x = 1$ no puede darse, pues entonces el corte dejaría intacto el tetraedro original, y el tronco de pirámide no existiría, luego ha de ser $x^3 + x^2 + x - 2 = 0$, qed.

Competición Matemática Mediterránea 2011

PROBLEMA 4

Sea D el pie de la bisectriz interior del angulo $\angle A$ del triángulo ABC. La recta que une los incentros de los triángulos ABD y ACD corta a AB en M y a AC en N. Demostrar que BN y CM se cortan sobre la bisectriz AD.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Sean E, F los puntos de corte respectivos de la recta BC y las bisectrices de los ángulos $\angle BAD$ y $\angle CAD$, y sean I_1, I_2, y r_1, r_2, los incentros e inradios respectivos de los triángulos ABD, ACD. Claramente, $r_1 = AI_1 \sin \frac{A}{4} = I_1E \sin \angle AED$, con lo que

$$\frac{AI_1}{I_1E} = \frac{\sin \angle AED}{\sin \frac{A}{4}}, \qquad \frac{AI_2}{I_2F} = \frac{\sin \angle AFD}{\sin \frac{A}{4}}.$$

Si $BC \parallel I_1I_2$, entonces $\sin \angle AED = \sin \angle EFD$. Pero $\angle AED = B + \frac{A}{4}$ y $\angle AFD = C + \frac{A}{4}$, luego como $B + C + \frac{A}{2} < 180°$, entonces $B = C$, AD es eje de simetría del triángulo ABC isósceles en A, luego también del segmento MN, y BN, CM se cortan en dicho eje de simetría. Queda entonces probado en este caso el resultado pedido.

Si I_1I_2 no es paralela a BC, ambas se cortan en un punto P, y al ser B, C intercambiables sin afectar al problema, podemos suponer que B está en el interior del segmento PC. Se tiene entonces por el teorema de Menelao, y usando el teorema del seno, que

$$\frac{EP}{PF} = \frac{I_2A}{FI_2} \cdot \frac{I_1E}{AI_1} = \frac{\sin \angle AFD}{\sin \angle AED} = \frac{AE}{AF}.$$

Ahora bien, por el teorema de la bisectriz, $\frac{DE}{EB} = \frac{AD}{AB}$, para $DE = \frac{AD \cdot BD}{AD+AB}$ y $BE = \frac{AB \cdot BD}{AD+AB}$, y por el teorema de Stewart,

$$AE^2 = \frac{DE \cdot AB^2 + BE \cdot AD^2}{BD} - BE \cdot DE = \left(\frac{2AB \cdot AD}{AD + AB} \cos \frac{A}{4} \right)^2,$$

luego

$$\frac{PE}{PF} = \frac{AE}{AF} = \frac{AB(AD + AC)}{AC(AD + AB)},$$

$$\frac{AB(AD + AC)}{AC(AD + AB)} = \frac{PB + BE}{PC - CF} = \frac{PB + \frac{AB \cdot BD}{AB+BD}}{PC - \frac{AC \cdot CD}{AC+AD}},$$

$$AB(AD + AC)PC - AC(AD + AB)PB = AB \cdot AC \cdot BC = AB \cdot AC(PC - PB),$$

y usando el teorema de la bisectriz, $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$. Ahora bien, por el teorema de Menelao, y al estar alineados M, N, P, se tiene

$$1 = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CN}{NA},$$

y por el teorema de Ceva, también en este caso las rectas AD, BN, CM coinciden en un punto.