PROBLEMA 221, propuesto por D.M. Batinetzu-Giurgiu, Bucarest, y Neculai Stanciu, Buzau

Sea $ABCD$ un tetraedro y M un punto del espacio, distinto de los vértices del tetraedro. Demostrar que

$$\frac{MA}{MB+MC+MD}+\frac{MB}{MC+MD+MA}+\frac{MC}{MD+MA+MB}+\frac{MD}{MA+MB+MC}\geq$$

$$\geq\frac{R+r}{R}\geq\frac{4r}{R},$$

donde R y r son, respectivamente, el radio de la esfera circunscrita y el de la esfera inscrita en el tetraedro.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Lema 1: Sea $ABCD$ un tetraedro inscrito en una esfera de radio R. Entonces su volumen es $V\leq\frac{8R^3}{9\sqrt{3}}$, con igualdad si y sólo si el tetraedro es regular.

Demostración 1: Siendo O el circuncentro del tetraedro, podemos elegir sin pérdida de generalidad un sistema de coordenadas XYZ con centro O, tal que el plano XY sea paralelo al triángulo ABC, y que los ángulos formados por el eje X con respecto a las rectas OB',OC' sean iguales, donde B',C' son las proyecciones respectivas de B,C sobre el plano XY. Entonces, $A\equiv(\rho\cos\delta,\rho\sin\delta,h)$, $B\equiv(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha,h)$, $C\equiv(\rho\cos\alpha,-\rho\sin\alpha,h)$ y $D\equiv(\rho'\cos\beta,\rho'\sin\beta,h')$, donde $\rho^2+h^2=\rho'^2+h'^2=R^2$, y sin pérdida de generalidad $h>h'$. Se tiene entonces que el volumen V del tetraedro cumple

$$3V=\rho^2(h-h')\left|\sin\alpha\left(\cos\delta-\cos\alpha\right)\right|.$$

Nótese que esta cantidad es una función periódica e infinitamente derivable respecto de α,δ salvo en los puntos en los que $V=0$, con lo que podemos ignorar el valor absoluto, derivar respecto a las variables, e igualar a 0 para obtener todos los extremos. Derivando respecto a δ, tenemos que sin pérdida de generalidad por simetría, ha de darse $\cos\delta=1$, y sustituyendo y derivando respecto a α, ha de darse además

$$0=2\cos^2\alpha-\cos\alpha-1=(2\cos\alpha+1)(\cos\alpha-1).$$

Claramente $\cos\alpha=1$ resulta en un tetraedro con volumen 0 (mínimo absoluto), luego $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ resulta en el máximo absoluto, a la vez que V es claramente máximo cuando h' es mínimo, es decir, para $h'=-R$. Luego

$$V\leq\frac{\sqrt{3}}{4}\rho^2(R+h)=\frac{\sqrt{3}}{8}(R+h)^2(2R-2h)\leq\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{2(R+h)+(2R-2h)}{3}\right)^3=\frac{8R^3}{9\sqrt{3}},$$

como queríamos demostrar, y con igualdad en la última desigualdad si y sólo si $R+h=2(R-h)$, es decir $R=3h$. Las condiciones $\delta=0$, $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, $h=-R$ y $h=\frac{R}{3}$ son claramente equivalentes a que $ABCD$ sea regular.

Lema 2: Sea un tetraedro $ABCD$ de volumen V, inradio r y suma de áreas de sus caras S. Entonces, $S\geq 6\sqrt[3]{\sqrt{3}V^2}$. Se da la igualdad si y sólo si $ABCD$ es regular. Como consecuencia, se tiene $V\geq 8\sqrt{3}r^3$, con igualdad si y sólo si $ABCD$ es regular.

Demostración 2: Sean a, b las longitudes respectivas de AD, BC, d la distancia entre las rectas AD, BC, y θ el ángulo formado por ambas rectas. Se puede completar $ABCD$ añadiendo rectas paralelas a sus lados, hasta formar un paralelepípedo con base de área $ab\sin\theta$, y altura d, luego $6V = abd\sin\theta$.

Al mismo tiempo, existen puntos $P \in AD$, $Q \in BC$, tales que $PQ \perp AD, BC$ y $PQ = d$. Se tiene entonces que la altura del triángulo DAB desde B es $\sqrt{BP^2 + d^2}$, luego el área $[DAB]$ del triángulo DAB es $\frac{AD}{2}$ veces esta altura. Se tiene entonces que

$$[CDA] + [DAB] = a\frac{\sqrt{CP^2 + d^2} + \sqrt{BP^2 + d^2}}{2} \geq a\sqrt{d^2 + \frac{BC^2}{4}} = a\sqrt{d^2 + \frac{b^2}{4}}.$$

Esta última desigualdad es consecuencia de la desigualdad entre medias aritmética y geométrica para BP^2, CP^2, y de la desigualdad triangular $BC \leq BP + CP$. Se da la igualdad entonces si y sólo si $BP = CP$ estando P en el interior del segmento BC. De forma similar, $[ABC] + [BCD] \geq b\sqrt{d^2 + \frac{a^2}{4}}$, con igualdad si y sólo si $AQ = DQ$.

Usando las anteriores desigualdades, aplicando la desigualdad entre medias, usando la expresión de V y que $\sin\theta \leq 1$, se obtiene

$$S^2 \geq \left(a\sqrt{d^2 + \frac{b^2}{4}} + b\sqrt{d^2 + \frac{a^2}{4}}\right)^2 \geq 4ab\sqrt{\left(d^2 + \frac{a^2}{4}\right)\left(d^2 + \frac{b^2}{4}\right)} \geq 4abd^2 + a^2b^2 =$$

$$= \frac{24dV}{\sin\theta} + \frac{36V^2}{d^2\sin^2\theta} \geq 12V\frac{d^3 + d^3 + 3V}{d^2} \geq 36V\sqrt[3]{3V},$$

equivalente a la primera parte del Lema 2. Se da la igualdad en esta desigualdad si y sólo si, simultáneamente, $a = b$, $\sin\theta = 1$, $3V = d^3$, $BP = CP$, $AQ = DQ$, o equivalentemente, si y sólo si $ABCD$ es regular.

Como consecuencia de lo anterior, y al ser $3V = Sr$, tenemos que

$$9V^2 = S^2r^2 \geq 36V\sqrt[3]{3V}r^2, \qquad V \geq 8\sqrt{3}r^3,$$

con igualdad claramente si y sólo si $ABCD$ es regular.

Lema 3: En todo tetraedro $ABCD$, se da $R \geq 3r$, con igualdad si y sólo si $ABCD$ es regular.

Demostración 3: Consecuencia inmediata de los Lemas 1 y 2.

Usando el Lema 3, es claro que nos basta con demostrar que, para cualesquiera reales no negativos a, b, c, d (que representan respectivamente a MA, MB, MC, MD), y siendo $s = a + b + c + d$, se cumple

$$\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} + \frac{d}{s-d} \geq \frac{4}{3}.$$

Esto es consecuencia trivial de la desigualdad de Jensen aplicada a la función $f(x) = \frac{x}{s-x}$, con derivada segunda estrictamente positiva $f''(x) = \frac{2s}{(s-x)^3}$ para $0 < x < s$, y con igualdad si y sólo si $a = b = c = d$.

Se sigue entonces el resultado pedido, dándose la igualdad en la segunda desigualdad si y sólo si $ABCD$ es regular, y en la primera si y sólo si $ABCD$ es regular y además M es su centro.