PROBLEMA 225, propuesto por el Editor

$XAYB$ es una cuaterna armónica; P es un punto que no está en la recta XY, tal que $XP = p$, $YP = q$, y el $\angle XPY = \theta$. Si x, y son las longitudes de las perpendiculares desde X e Y a la tangente común a los dos circulos de centros respectivos A y B, y que pasan por P, demostrar que $xy = pq \cdot \cos\theta$.

Observación del editor: se utiliza la notación inglesa para la cuaterna armónica: los puntos X, A, Y, B estan **en ese orden** sobre la recta.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Sean a, b los radios de los círculos de centros A, B por P. Aplicando el teorema de Stewart a las cevianas PA, PY en los triángulos PXY, PXB respectivamente, y tras reorganizar términos, se llega a

$$p^2 + q^2 - XY^2 = \frac{XY^2}{XA \cdot AY}a^2 - \frac{AY}{XA}p^2 - \frac{XA}{AY}q^2 = \frac{YB}{XB}p^2 + \frac{XB}{YB}q^2 - \frac{XY^2}{YB \cdot XB}b^2.$$

Ahora bien, por ser $XAYB$ cuaterna armónica, se tiene que $\frac{AY}{XA} = \frac{YB}{XB}$, luego sumando ambas expresiones para $p^2+q^2-XY^2$, y aplicando el teorema del coseno, se tiene

$$4pq\cos\theta = \frac{XY^2}{XA \cdot AY}a^2 - \frac{XY^2}{YB \cdot XB}b^2 = \frac{XB \cdot YB \cdot a^2 - XA \cdot AY \cdot b^2}{AY^2 \cdot XB^2}XY^2.$$

Por ser $ABCD$ una cuaterna armónica, existe $k = \frac{XA}{AY} = \frac{XB}{YB}$, con lo que podemos escribir $XY = AY(k+1) = (k-1)YB$ donde claramente k no puede tomar los valores $-1, 0, 1$ porque los puntos X, A, Y, B son distintos. Usando k, la anterior expresión se puede escribir como

$$4pq\cos\theta = \frac{(k+1)^2a^2 - (k-1)^2b^2}{k}.$$

Consideramos ahora dos casos:

Caso 1: La recta tangente a ambos círculos es paralela a la recta XB, o equivalentemente, $a = b = x = y$, con lo que

$$pq\cos\theta = \frac{(k+1)^2 - (k-1)^2}{4k}xy = xy,$$

como queríamos demostrar.

Caso 2: La recta tangente a ambos círculos no es paralela a la recta XB, o equivalentemente x, a, y, b son todos distintos y están en orden bien estrictamente creciente, bien estrictamente decreciente. Por el teorema de Thales,

$$\frac{a-x}{XA} = \frac{y-x}{XY} = \frac{b-x}{XB} = \frac{y-a}{AY} = \frac{b-y}{YB},$$

donde los numeradores en la anterior cadena de igualdades son, o todos positivos, o todos negativos. Se comprueba fácilmente que $(k+1)a = ky+x$ y $(k-1)b = ky-x$, luego

$$pq\cos\theta = \frac{(ky+x)^2 - (ky-x)^2}{4k} = xy,$$

como queríamos demostrar.