GENERALIZACIÓN DE UN PROBLEMA PROPUESTO EN LA XLVI OME Y SU RELACIÓN CON LA DESIGUALDAD DE NESBITT

D.M. BĂTINEȚU-GIURGIU[1] y NECULAI STANCIU[2]

Abstract. This note presents a generalization for a problem given to the $XLVI^{th}$ National Mathematics Olympiad of Spain (OME).
Keywords: Cauchy-Buniakovski-Schwarz's inequality, Bergström's inequality, Jensen's inequality, the AM-QM inequality, Nesbitt's inequality, Olympiad.
MSC : 26D15

En la XLVI Olimpiafa Matemática Española, Fase Nacional (Valladolid), el segundo día (27de marzo de 2010) se propuso el siguiente

Problema. *Sean* a, b, c *numerous reales positivos. Probar que:*

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2c}+\frac{a+3b+c}{3a+2b+3c}+\frac{3a+b+c}{2a+3b+3c}\geq\frac{15}{8} \tag{1}$$

Si llamamos $a=x_1, b=x_2, c=x_3$, y $X_3=a+b+c$, entonces la (1) se convierte en:

$$\frac{X_3+2x_1}{3X_3-x_1}+\frac{X_3+2x_2}{3X_3-x_2}+\frac{X_3+2x_3}{3X_3-x_3}\geq\frac{15}{8} \tag{2}$$

Nos proponemos generalizar esta desigualdad y dar varias demostraciones de su generalización.

Una Generalización. *Si* $n\in N^*-\{1,2\}, a\in R_+, b, c, d, x_k\in R_+^*, \forall k=\overline{1,n}$,

$$X_n=\sum_{k=1}^{n}x_k \textit{ and}$$

$$cX_n>d\max_{1\leq k\leq n}x_k$$

entonces:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\geq\frac{(an+b)n}{cn-d} \tag{3}$$

Demostración 1. Tenemos:

$$(an+b)^2X_n^2=\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}}\cdot\sqrt{(aX_n+bx_k)(cX_n-dx_k)}\right)^2\overset{(C-B-S)}{\leq}$$

$$\overset{(C-B-S)}{\leq}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)(cX_n-dx_k)\right)\Leftrightarrow$$

[1] Department of Mathematics, "Matei Basarab" National College, Bucharest, Romania
[2] Department of Mathematics, "George Emil Palade" General School, Buzău, Romania

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\ge \frac{(an+b)^2X_n^2}{\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)(cX_n-dx_k)}=\frac{(an+b)^2X_n^2}{acnX_n^2+(bc-ad)X_n\sum_{k=1}^{n}x_k-bd\sum_{k=1}^{n}x_k^2}=$$
$$=\frac{(an+b)^2X_n^2}{(acn+bc-ad)X_n^2-bd\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

Por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica deducimos que:

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2\ge \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2=\frac{X_n^2}{n} \tag{4}$$

Entonces obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\ge \frac{(an+b)^2X_n^2}{(acn+bc-ad)X_n^2-\frac{bd}{n}X_n^2}=\frac{(an+b)^2n}{acn^2+(bc-ad)n-bd}=\frac{(an+b)n}{cn-d}.$$

Demostración 2. Se tiene:

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(aX_n+bx_k)^2}{(aX_n+bx_k)(cX_n-dx_k)},$$

Y por la desigualdad de *Bergström* deducimos que:

$$U_n\ge \frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}\left(acX_n^2+(bc-ad)X_nx_k-bdx_k^2\right)}=\frac{(an+b)^2X_n^2}{acnX_n^2+(bc-ad)X_n^2-bd\sum_{k=1}^{n}x_k^2},$$

Donde hemos tenido en cuenta (4), y se obtiene la conclusión.

Demostración 3. Consideremos el trinomio:

$$T_n=\left(\sqrt{\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}}\cdot X-\sqrt{(aX_n+bx_k)(cX_n-dx_k)}\right)^2=$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)X^2-2\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)\right)X+\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)(cX_n-dx_k)=$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)X^2-2\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)\right)X+\sum_{k=1}^{n}\left(acX_n^2+(bc-ad)X_nx_k-bdx_k^2\right).$$

Ya que los valores del trinomio cuadrático $T_n(x)\ge 0, \forall x\in R$ resulta:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(acX_n^2+(bc-ad)X_nx_k-bdx_k^2\right)\right)=$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)\left(acnX_n^2+(bc-ad)X_n^2-bd\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right).$$

Entonces, por (4) se obtiene que:

$$\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)\left(acn+bc-ad-\frac{bd}{n}\right)X_n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{aX_n + bx_k}{cX_n - dx_k} \geq \frac{(an+b)^2 X_n^2}{\left(acn + bc - ad - \frac{bd}{n}\right) X_n^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{aX_n + bx_k}{cX_n - dx_k} \geq \frac{n(an+b)^2}{acn^2 + (bc - ad)n - bd} =$$

$$= \frac{n(an+b)^2}{(an+b)(cn-d)} = \frac{n(an+b)}{cn-d} \text{, q.e.d.}$$

Demostración 4. Consideremos $R^n = \underbrace{R \times R \times ... \times R}_{n}$, $n \in N^*$, donde para cualesquiera $x, y \in R^n$,

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ y para todo $\lambda \in R$, definimos:

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in R^n$ y $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \in R^n$.

Así R^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo R. Definimos también $\langle \, , \rangle : R^n \times R^n \to R$, $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ (producto escalar de los vectores x e y) y entonces R^n se convierte en un espacio de Hilbert en el que una base ortogonal es el sistema de vectores $e_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, ..., \delta_{nk})$, donde $k = \overline{1,n}$ y $\delta : A_n \times A_n \to R$, $\delta(i,j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{if } i = j \\ 0, \text{if } i \neq j \end{cases}$, y $A_n = \{1,2,...,n\}$.

La función δ es el símbolo de *Kroneker*.

Es obvio que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $\forall (i,j) \in A_n \times A_n$. Así, $\|e_k\| = 1$, $\forall k = \overline{1,n}$ y entonces el sistema $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n}$ es un sistema ortonormal de vectores del espacio de Hilbert R^n.

Para cualquier vector $x \in R^n$, consideremos la función $\varphi : A_n \to R$, $\varphi(k) = \langle x, e_k \rangle = \varphi_k$ o sea, $x = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$, donde $\varphi_k, k = \overline{1,n}$ son los coeficientes de *Fourier*s de x del espacio de *Hilbert* R^n con respecto al sistema ortonormal $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n}$.

Por lo tanto para todo $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ se tiene $x = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k e_k = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$, es decir $x_k = \varphi_k = \langle x, e_k \rangle$, $\forall k = \overline{1,n}$. También tenemos: $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, y entonces se verifica la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|, \ \forall x, y \in R^n,$$

O sea

$$(\langle x, y \rangle)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

Considerando los vectores $x, y \in R^n$, con:

$$x = \left(\sqrt{\frac{aX_n + bx_1}{cX_n - dx_1}}, \sqrt{\frac{aX_n + bx_2}{cX_n - dx_2}}, ..., \sqrt{\frac{aX_n + bx_n}{cX_n - dx_n}}\right) \text{ e}$$

$$y = \left(\sqrt{(aX_n + bx_1)(cX_n - dx_1)}, \sqrt{(aX_n + bx_2)(cX_n - dx_2)}, ..., \sqrt{(aX_n + bx_n)(cX_n - dx_n)}\right).$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left(\langle x,y\rangle\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(aX_n+bx_k\right)\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(acX_n^2+(bc-ad)X_nx_k-bdx_k^2\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\ge\frac{\left(an+b\right)^2X_n^2}{\left(acn+bc-ad\right)X_n^2-bd\sum_{k=1}^{n}x_k^2}\qquad(5)$$

Como la función $f:R_+^*\to R_+^*,\ f(t)=t^2$ es convexa en R_+^*, por la desigualdad de *Jensen* se deduce que:

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\ge nf\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)=n\left(\frac{X_n}{n}\right)^2=\frac{X_n^2}{n},$$

Y entonces de (5) resulta que:

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\ge\frac{\left(an+b\right)^2X_n^2}{\left(acn+bc-ad-\frac{bd}{n}\right)X_n^2}=\frac{\left(an+b\right)^2n}{\left(an+b\right)\left(cn-d\right)}=\frac{\left(an+b\right)n}{cn-d},$$

q.e.d.

Aplicaciones.

A.1. Si $a=0,b=c=d=1$, entonces la relación (3) se escribe como:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{X_n-x_k}\ge\frac{n}{n-1},$$

y para $n=3$ obtenemos la desigualdad de *Nesbitt*, i.e.:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\ge\frac{3}{2}.$$

A.2. Si $a=1,b=2,c=3$ y $d=1$, entonces la (3) resulta ser:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{X_n+2x_k}{3X_n-x_k}\ge\frac{\left(n+2\right)n}{3n-1},$$

de la que para $n=3$ se obtiene la (2) y después se deduce (1).