La Batalla Matemática

Eric Milesi, Óscar Rivero

1 Introducción

La extinta Unión Soviética era un lugar donde las competiciones de matemáticas gozaban de gran importancia y prestigio dentro del sistema educativo, y hoy en día aún perviven diversos torneos y olimpiadas oriundos de dicho país. El profesor Francisco Bellot Rosado introdujo el curso pasado en España las denominadas "batallas matemáticas", formato originario de San Petersburgo que permite desarrollar la capacidad expositiva y la claridad a la hora de presentar los razonamientos, a la par que potencia el trabajo colectivo y, obviamente, la habilidad para resolver problemas.

En las batallas matemáticas, los contendientes son divididos en dos equipos y llevados a aulas separadas donde se les entregan copias de los enunciados y se les deja un tiempo razonable para su resolución (en nuestro caso hora y media). Posteriormente, ya reunidos los equipos bajo la presidencia del jurado, se procede al inicio de la batalla; primero, cada uno de los bandos designa a un capitán, que deberá salir al estrado para batirse con su oponente en el denominado torneo de capitanes, que consta sólo de un problema, generalmente de baja dificultad. El primero en encontrar la respuesta correcta lo indica y procede a su explicación, y en caso de ser ésta aceptada, es declarado ganador, mientras que en caso contrario puede optarse por automáticamente declarar al oponente ganador o esperar a que éste encuentre la solución.

El equipo que gana este torneo inicial será el que tome la iniciativa, y decidirá si quiere empezar retando o siendo retado; este proceso se mantendrá a lo largo de toda la contienda, y se basa en que un equipo (digamos A), desafía al oponente a la resolución de uno de los problemas, pudiendo el equipo contrario (digamos B) aceptar o rehusar la propuesta. En el primer caso, uno de los miembros debe salir a la pizarra a exponer la solución, actuando uno de los integrantes del otro bando como oponente, pudiendo refutar o criticar sus argumentos. Si el equipo B rechaza el reto, entonces alguien del equipo A deberá explicar la solución, teniendo entonces a un miembro de B como oponente; si A también rechazase el salir a explicar la solución, se considera "reto incorrecto". Finalmente, tras cada turno, el jurado reparte y distribuye los 12 puntos que vale cada problma, teniendo en cuenta la claridad en la exposición del ponente y la labor crítica del oponente, pudiendo también atribuirse puntos a sí mismo. En caso de reto incorrecto, el equipo B (el que fue retado), recibe 6 puntos y el jurado otros 6 puntos.

Después de que el equipo ganador del torneo de capitanes decida si quiere empezar retando o siendo retado, se va alternando el equipo que lanza el desafío, hasta que uno de los bandos en contienda ya no tenga más problemas resueltos, momento a partir del cual el otro equipo presenta el resto de soluciones que haya obtenido. Concluida la batalla, se suman los puntos y el equipo que tenga mayor cantidad es proclamado ganador por el jurado.

2 Problemas y soluciones

A continuación presentamos los enunciados y soluciones de la batalla matemática celebrada el pasado verano en las sesiones de preparación del equipo que representó a España en la IMO 2012.

Problema 1. *Un número de* 6 *cifras (todas distintas y no nulas) es divisible por* 37*. Demostrar que, por permutación de sus cifras, se pueden obtener al menos* 23 *números más, igualmente divisibles por* 37*.*

Solución. El número de 6 cifras distintas lo podemos escribir en la forma $A = a_6a_5a_4a_3a_2a_1$, que en notación decimal es

$$a_6a_5a_4a_3a_2a_1 = a_6 10^5 + a_5 10^4 + a_4 10^3 + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1$$

Ahora construimos una tabla donde figuran los restos de las potencias de 10^n, $(0 \leq n \leq 5)$ módulo 37:

n	$10^n \pmod{37}$
0	1
1	10
2	-11
3	1
4	10
5	-11

Dado que $A \equiv 0 \pmod{37}$, entonces se tiene que

$$a_6 10^5 + a_5 10^4 + a_4 10^3 + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1$$

$$\equiv -11a_6 + 10a_5 + a_4 - 11a_3 + 10a_2 + a_1 \equiv 0 \pmod{37}$$

De donde se deduce que permutando a_6 con a_3 , a_5 con a_2 y a_4 con a_1 en $a_6a_5a_4a_3a_2a_1$ el número que resulte seguirá siendo congruente con 0 (mod 37). Si procedemos de esta forma obtenemos 8 permutaciones que corresponden a números multiplos de 37 que son la inicial y 7 más.

Multiplicando $-11a_6 + 10a_5 + a_4 - 11a_3 + 10a_2 + a_1$ por 10, se obtiene

$$10 \times (-11a_6 + 10a_5 + a_4 - 11a_3 + 10a_2 + a_1)$$

$$\equiv 1a_6 - 11a_5 + 10a_4 + a_3 - 11a_2 + 10a_1 \equiv 0 \pmod{37}$$

De lo que se deduce que el número $a_5a_4a_6a_2a_1a_3$ es múltiplo de 37 porque

$$a_5 10^5 + a_4 10^4 + a_6 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_3$$

$$\equiv 1a_6 - 11a_5 + 10a_4 + a_3 - 11a_2 + 10a_1 \equiv 0 \pmod{37}$$

Permutando nuevamente a_6 con a_3, a_5 con a_2 y a_4 con a_1 en $a_5a_4a_6a_2a_1a_3$ se obtienen 8 nuevas permutaciones que no han sido contadas antes porque ahora la primera cifra o bien es a_5 o bien es a_2 y antes era a_6 o a_3.

Nuevamente multiplicando por 10

$$10 \times (1a_6 - 11a_5 + 10a_4 + a_3 - 11a_2 + 10a_1)$$

$$\equiv 10a_6 + 1a_5 - 11a_4 + 10a_3 + 10a_2 - 11a_1 \equiv 0 \pmod{37}$$

se obtiene que el número $a_4a_6a_5a_1a_3a_2$ es múltiplo de 37 porque

$$a_4 10^5 + a_6 10^4 + a_5 10^3 + a_1 10^2 + a_3 10 + a_2$$

$$\equiv 10a_6 + 1a_5 - 11a_4 + 10a_3 + 10a_2 - 11a_1 \equiv 0 \pmod{37}$$

Permutando a_6 con a_3, a_5 con a_2 y a_4 con a_1 en $a_4a_6a_5a_2a_3a_2$ se obtienen 8 nuevas permutaciones que son distintas de las anteriores porque la primera cifra es o a_4 o a_1. En total tenemos $7 + 8 + 8 = 23$ permutaciones que son múltiplos de 37, y hemos terminado.

Problema 2. *En un torneo de patinaje hay* 10 *participantes. Cada uno de los tres jueces asigna a cada participante un rango (de* 1 *a* 10*, indicando el puesto que según él merece cada uno). Javi suma sus tres rangos y esa suma es menor que la de los demás participantes. ¿Cuál es el mayor valor de esa suma, que puede obtener Javi?*

Solución. Denotamos $A, B, C, \ldots, J$ a los participantes, siendo Javi la J. A continuación vamos a mostrar un caso en el que se observa que es posible que la puntuación de Javi sea 15 y se cumplan las condiciones del enunciado. Esto se puede ver con la siguiente distribución de puntos:

Part.	Juez 1	Juez 2	Juez 3	Total
A	2	4	10	16
B	10	2	4	16
C	4	10	2	16
D	1	7	9	17
E	9	1	7	17
F	7	9	1	17
G	3	6	8	19
H	8	3	6	19
I	6	8	3	19
J	5	5	5	15

Como se observa en la tabla, la puntuación de Javi es 15, cada participante tiene puntuación mayor que 15 y cada juez ha atribuido todos los posibles rangos entre 1 y 10. Una vez constatado que es posible que Javi tenga 15 puntos vamos a ver que no es posible que tenga 16. Procederemos por reducción al absurdo. En efecto, supongamos que la puntación de Javi fuese $p = 16$ y sea S la suma de las puntuaciones totales. Por las condiciones del enunciado la puntuación de cada particpante distinto de Javi tiene que ser como mínimo $p+1$. Entonces tenemos: $S \geq p+9(p+1) \Rightarrow S \geq 16+9\times 17 = 169$. Luego la suma de las puntuacions totales es como mínimo 169. Pero por otro lado tenemos que la suma de puntuaciones totales es

$$S = (1+2+\ldots+10)\times 3 = \frac{10(10+1)}{2}\times 3 = 165$$

Luego no puede ser que $S \geq 169$, y por lo tanto Javi no puede tener 16 puntos.

Problema 3. *Probar que la ecuación*

$$(a+b\sqrt{3})^4 + (c+d\sqrt{3})^4 = 1+\sqrt{3}$$

no tiene solución en números racionales a, b, c, d.

Solución. En lo que sigue vamos a necesitar el siguiente resultado.

Lema 1. *Si* $x, y, z, t \in \mathbb{Q}^+$ *entonces* $x + y\sqrt{3} = z + t\sqrt{3}$ *si y sólo si* $x = z$ *e* $y = t$.

Demostración. Supongamos que $y \neq t$. Tenemos que $x - z = (t-y)\sqrt{3}$ y como $t - y \neq 0$ entonces $\sqrt{3} = \dfrac{x-z}{t-y}$ con lo que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}^+$ lo cual es falso. $\square$

Ahora desarrollamos las potencias de ambos binomios y agrupamos los términos con $\sqrt{3}$ por un lado y aquellos que no tengan $\sqrt{3}$ por otro. Según el lema anterior tenemos que

$$\left.\begin{array}{r} a^4+6a^2b^23+9b^4+c^4+6c^2d^23+d^29=1 \\ 4a^3b\sqrt{3}+4ab^33\sqrt{3}+4c^3d\sqrt{3}+4cd^33\sqrt{3}=\sqrt{3} \end{array}\right\}$$

Restando de la primera la segunda ecuación se obtiene

$$a^4-4a^3b\sqrt{3}+6a^2b^23-4ab^33\sqrt{3}+9b^4+c^4-4c^3d\sqrt{3}+6c^2d^23-4cd^33\sqrt{3}+d^29=1-\sqrt{3}$$

Factorizando resulta

$$(a-b\sqrt{3})^4+(c-d\sqrt{3})^4=1-\sqrt{3}$$

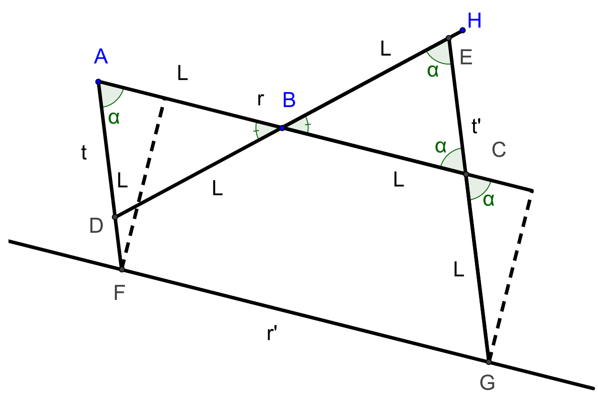
Como la parte izquierda es suma de cuadrados, entonces

$$(a-b\sqrt{3})^4+(c-d\sqrt{3})^4\geq 0$$

y resulta claro que $1-\sqrt{3}<0$. Por tanto, el término izquierdo es no negativo y el derecho estrictamente negativo entonces la igualdad no se alcanza y por consiguiente la ecuación no tiene soluciones con $a,b,c,d\in\mathbb{Q}^+$.

Problema 4. *La regla infinita con dos puntos marcados en ella, a distancia L entre sí, es un instrumento de dibujo para trazar la recta que pasa por dos puntos, y también para marcar el punto de la recta ya dibujada, a distancia L de uno de los puntos dados. No se puede usar el otro lado de la regla ni girarla alrededor de un punto fijo (si la giras, la regla se cae). Usando solamente esta regla y un lápiz, construir una recta paralela a una dada.*

Solución. Tenemos una recta dada en el plano a la cual llamaremos r. En r fijamos un punto cualquiera al cual llamaremos B. Con nuestra regla podemos encontrar dos nuevos puntos A y C sobre r tal que estén a distancia L de B y a distancia $2L$ entre ellos.



Podemos marcar un punto cualquiera H en el plano, y al unirlo con B utilizando nuestra regla, tendremos una recta arbitraria que pasa por B. Sobre esta recta $\overline{BH}$ que llamaremos s, con la regla trazamos D y E a distancia L de B. Llamamos a las rectas $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$, t y t' respectivamente. Se forman así dos triángulos congruentes ABD y BCE. Tienen dos lados iguales (los que miden L), y el ángulo ABD es igual a CBE y por ser isósceles, $BAD = BCE = \alpha$. Como comparten el punto B entonces las rectas t y t' son paralelas porque los triángulos son homotéticos. Desde A y C se mide sobre t y t' respectivamente, una distancia L obteniéndose así los puntos F y G y la recta $\overline{FG}$, paralela a r porque la distancia de F a r es $d = L\sin\alpha$ y es la misma que la que hay desde G a r, $d = L\sin\alpha$.

Problema 5. *Con la notación $[x]$ representamos el mayor entero que es menor o igual que x (es decir, es la parte entera de x). Hallar todos los números primos que son de la forma $\left[\frac{n^2}{5}\right]$, siendo n un número natural.*

Solución. Como n es un entero consideraremos 5 casos distintos que corresponden a los restos de n módulo 5. Es decir, $0, 1, 2, 3, 4$.
Caso $1 : n \equiv 0 \pmod 5$
Entonces $n = 5k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $n^2 = 25k^2$, por tanto

$$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2}{5}\right] = 5k^2$$

que es primo si y solo si $k = 1$ y entonces $\left[\frac{n^2}{5}\right] = 5$.
Caso $2 : n \equiv 1 \pmod 5$
Entonces $n = 5k + 1 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 10k + 1$ luego

$$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2 + 10k + 1}{5}\right] = 5k^2 + 2k = k(5k + 2)$$

Para que sea primo uno de los dos factores tiene que ser 1 pero como $5k + 2 > 1$ entonces $k = 1$ y $\left[\frac{n^2}{5}\right] = 1(5 \times 1 + 2) = 7$
Caso $3 : n \equiv 2 \pmod 5$
Entonces $n = 5k + 2 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 20k + 4$ luego

$$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2 + 20k + 4}{5}\right] = 5k^2 + 4k = k(5k + 4)$$

Ahora para que sea primo $k = 1$ pero con $k = 1$ obtenemos $1(5\times 1+4) = 9$, que no es primo.
Caso $4 : n \equiv 3 \pmod 5$
Entonces $n = 5k + 3 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 30k + 9$ luego

$$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2 + 30k + 9}{5}\right] = 5k^2 + 6k + 1 = (k + 1)(5k + 1)$$

Para que sea primo uno de los dos factores tiene que ser 1, pero ambos factores son 1 cuando $k = 0$ y entonces tenemos $(0+1)(5 \times 0 + 1) = 1$ que no es primo
Caso 5 : $n \equiv 4 \pmod 5$
Entonces $n = 5k + 4 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 40k + 16$ luego

$$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2 + 40k + 16}{5}\right] = 5k^2 + 8k + 3 = (k+1)(5k+3)$$

Para que sea primo o $5k + 3 = 1 \Rightarrow k = \frac{-2}{5}$ lo cual es imposible porque $k \in \mathbb{Z}$ o si $k + 1 = 1 \Rightarrow k = 0$ y resulta $\left[\frac{n^2}{5}\right] = (0+1)(5 \times 0 + 3) = 3$ que sí es primo.

Por tanto todos los posibles valores primos que toma $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ son: $3, 5, 7$.

Problema 6. *El dragón es una pieza de ajedrez situada en una casilla de un tablero infinito (con las casillas coloreadas de blanco y negro alternativamente). Se mueve de la manera siguiente: salta a una casilla contigua (horizantal o verticalmente) y a continuación salta N casillas en la dirección perpendicular a la de la primera parte de su movimiento. Es decir, para $N = 2$ el movimiento del dragón es el de caballo de ajedrez. ¿Para qué valores de N el dragón puede alcanzar cualquier casilla del tablero?*

Solución. Vamos a distinguir dos casos: N par y N impar. Con N impar no se puede porque el dragón se va a mover sólo sobre las casillas de un mismo color, dado que en cada salto se produce un cambio de color y en total hará $N + 1$ saltos, que será un número par. Es decir, cambiará de color un número par de veces y como sólo hay dos colores es lo mismo que no cambiar, luego o sólo se mueve por casillas blancas o sólo por negras.
Procedamos ahora con el caso en que N sea par. Vamos a demostrar que el dragón sí que puede ir a todas las casillas. En efecto, vamos a describir un algoritmo que nos permita llegar a una casilla contigua a la que se parte. Así por simetría podríamos ir a cualquiera de las 4 direcciones y en consecuencia podremos ir a todas las casillas del tablero. Supongamos que partimos de la posición (x, y) y queremos llegar a $(x, y+1)$. Entonces el dragón puede moverse de 8 maneras distintas que corresponden a los siguientes vectores:

$$\left.\begin{array}{c} (1, N) \\ (1, -N) \\ (-1, N) \\ (-1, -N) \\ (N, 1) \\ (N, -1) \\ (-N, 1) \\ (-N, -1) \end{array}\right\}$$

Ahora, partiendo de (x, y) y mediante combinaciones lineales de los vectores anteriores queremos llegar a $(x, y + 1)$. Empezamos con $(x, y) + (1, N) + (1, -N) = (x + 2, y)$, y en dos pasos podemos ir a $(x + 2, y)$. Ahora como N es par si repetimos este procedimiento $\frac{N}{2}$ veces llegaremos a la casilla $(x+N, y)$, y si ahora nos movemos $(-N, 1)$ iremos a $(x+N, y)+(-N, 1) = (x, y + 1)$. Análogamente podemos ir a $(x + 1, y)$, $(x - 1, y)$ y $(x, y - 1)$ y así el dragón puede ir a todas las casillas del tablero.

Centro de Formación Interdisciplinaria Superior (CFIS)
BARCELONA TECH, Barcelona, España.
milesividal@gmail.com, riverosalgado@tgmail.com