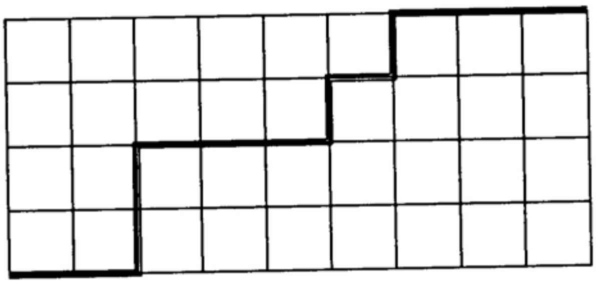
UNA PRIMERA LECCIÓN DE COMBINATORIA

Francisco Bellot Rosado

Seminario de Problemas, Valladolid, 16-17 de octubre de 2012

Algunas formas de explicar cuestiones de Matemáticas, expuestas por buenos profesores, te impresionan de tal forma que, desde que las ves, las utilizas de manera sistemática. Eso me ocurrió en octubre de 1964, cuando tuve el privilegio de seguir, siendo su alumno becario, el desarrollo de la Combinatoria presentado en el Instituto "Cervantes" por el Profesor D. José Ramón Pascual Ibarra.

Para empezar, un problema...



La figura sobre estas líneas representa idealizado el plano de una ciudad, con manzanas de casas exactamente iguales. Se pretende ir del vértice inferior izquierdo al superior derecho, por las calles, y de manera que el camino recorrido tenga longitud mínima. ¿Cuántos caminos de estas características hay?

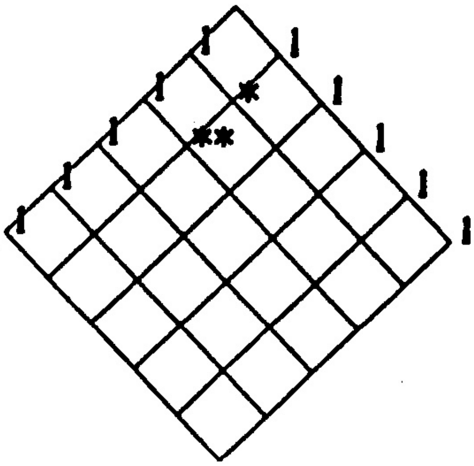
(La exigencia de ser de longitud mínima implica en este caso que solamente se pueda ir, horizontalmente, de izquierda a derecha; y verticalmente, de abajo a arriba).

Se observa fácilmente que los caminos posibles tienen todos 4 tramos verticales y 9 horizontales. Pero llegar a saber cuántos son no parece demasiado sencillo (si no se conoce el problema, naturalmente).

¿Serán más o menos de 100 los caminos? *(Podemos hacer una votación...)*

Al cabo de unos momentos, se puede sugerir a los alumnos que sigan el consejo de Pólya: *Si un problema plantea una* *situación muy complicada, estúdiese el mismo problema en un contexto más sencillo...*

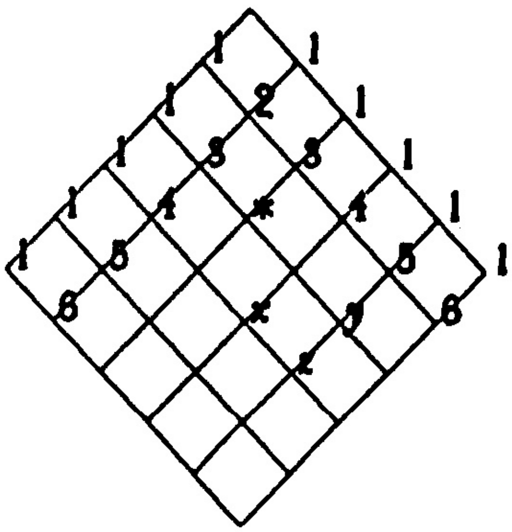
La figura siguiente está tomada de un libro de Pólya, *Notes on Introductory Combinatorics.*



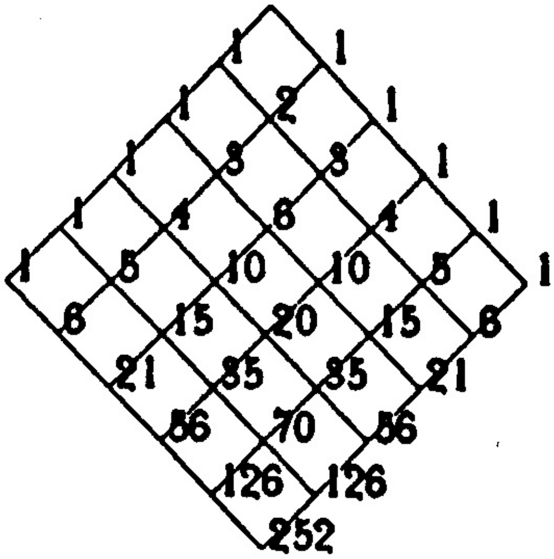
Por conveniencia hemos dispuesto la figura con otra orientación, y ahora se trata de hallar el número de caminos que van del vértice superior al inferior del cuadrado.

¿Cuántos caminos llevan al vértice marcado con un asterisco? ¿Y con dos?

Compliquemos la figura un poco más:



Hasta que, finalmente, la completamos :

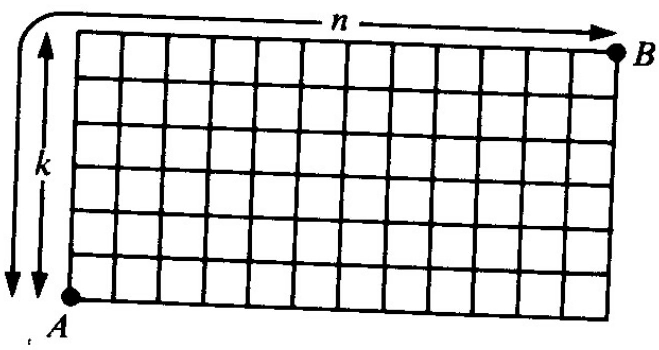


Si aplicamos el procedimiento descrito al problema original, obtendríamos 715 caminos: demasiados para dibujarlos todos y contarlos después.

Este primer ejemplo pertenece a lo que se llama *Combinatoria enumerativa,* o si se quiere, al *Arte de contar sin enumerar.* A continuación trataremos de profundizar un poco más en lo que hay *detrás* del problema.

Nomenclatura

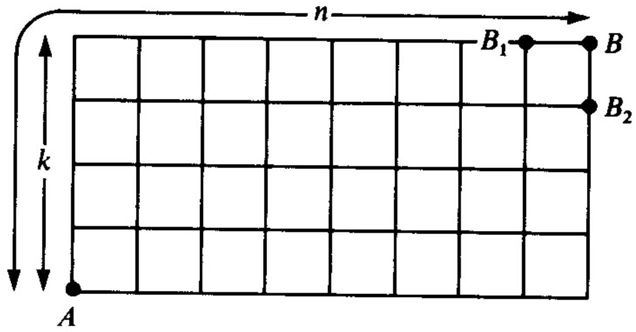
Imaginemos, como se indica en la figura siguiente, que se tiene de nuevo un rectángulo en su posición normal, con caminos que constan de *n* segmentos, de los que *k* de ellos van *hacia arriba:*



Sería importante disponer de una fórmula que permitiera calcular el número de caminos, en función de k y de n, para no tener que repetir el procedimiento *pedestre,* pero eficaz, empleado para el cálculo en los casos particulares. Por lo de pronto vamos a utilizar el símbolo siguiente para representar ese número:

$$C_k^n = \binom{n}{k}.$$

La C no es exactamente por "caminos", pero viene bien en esta ocasión. El símbolo de la derecha lo leemos como *"n sobre k".*



Es evidente, según la figura anterior, que el número de caminos mínimos para ir de A a B es la suma de los que van desde A a B_1 más los que van desde A a B_2.

Con la notación que hemos elegido, hemos llegado a

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Esta igualdad es lo que se llama una *fórmula de recurrencia;* para calcular el valor del primer miembro necesitamos conocer todos los valores anteriores (es lo que hemos hecho antes para calcular el número de caminos).

Si *k=0,* el rectángulo se reduce a un segmento horizontal de longitud *n*. Para ir de un extremo a otro solamente hay un camino, lo cual se puede expresar mediante

$$\binom{n}{0} = 1.$$

Si el segmento fuera vertical con $k=n$ también tendríamos un único camino, de modo que

$$\binom{n}{n}=1.$$

Estas dos son las condiciones iniciales de la recurrencia.

Por otro lado, con la interpretación de los caminos que estamos haciendo, se ve que también se verifica

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k},$$

porque eso es tanto como decir que giramos el rectángulo 90º alrededor de un vértice: los tramos horizontales antes, ahora son verticales.

Los números $\binom{n}{k}$ reciben el nombre de *coeficientes binomiales o números combinatorios*. Si observamos los números que van apareciendo al calcular los caminos, pero sin la cuadrícula, obtenemos el llamado *triángulo aritmético, triángulo de Tartaglia o triángulo de Pascal:*

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1\\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1\\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}$$

Del que, naturalmente, sólo podemos mostrar una parte, porque tiene infinitas filas.

El nombre coeficientes binomiales se debe a que son los coeficientes que se obtienen cuando se calcula el desarrollo de

$$(1+x)^n,$$

para valores de *n=0,1,2,3,...* como se comprobará dentro de poco.

Una expresión explícita para los coeficientes binomiales

La definición clásica de $\binom{n}{k}$ es la de contar el número de subconjuntos con k elementos de un conjunto que tiene n elementos (no se permiten repeticiones, por eso hablamos de conjuntos). No se considera, tampoco, el orden en que aparezcan los elementos.

El siguiente procedimiento para obtener explícitamente n sobre k en función de n y k está tomado de otro excelente libro: *A First Course in Discrete Mathematics,* de Ian Anderson (Springer, 2000).

Supongamos que hemos de elegir un equipo de k jugadores de un grupo de n personas, uno de los cuales será el capitán. Esto se puede hacer eligiendo primero el equipo – y hay $\binom{n}{k}$ formas de hacerlo – y luego elegir el capitán – y hay k maneras de hacerlo. Luego en total tenemos $k\binom{n}{k}$ maneras de conseguirlo. Pero, en vez de eso, podemos primero elegir el capitán – y hay n formas de hacerlo – y después elegir al resto del equipo – y hay $\binom{n-1}{k-1}$ formas, con lo que en definitiva tenemos de este otro modo $n\binom{n-1}{k-1}$ equipos posibles con su capitán. Es decir, que se tendrá que cumplir

$$n\binom{n-1}{k-1}=k\binom{n}{k},$$

con lo que

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Reiterando el procedimiento obtenemos

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}=\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-2}$$

y continuando de este modo, llegaremos a

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}=\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-2}=\cdots=\frac{n(n-1)\cdots(n-(k-2))}{k\cdot(k-1)\cdot\cdots2}\binom{n-(k-1)}{1}$$

y como $\binom{m}{1}=m$, se tiene la fórmula explícita que buscábamos:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\cdots2\cdot1}.$$

El razonamiento anterior es una buena muestra de lo fructífero que puede ser contar la misma cosa de dos maneras distintas.

Esta fórmula se puede escribir de una manera más compacta si utilizamos el concepto de *factorial* y su correspondiente símbolo.

Si n es un entero mayor que 0, se define el *factorial de n* y se representa por *n!* al producto de los n números enteros que van de 1 a n:

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1$$

Si n = 0, para que las dos condiciones iniciales de la recurrencia anterior sigan valiendo, se admite por convenio que 0! = 1.

Utilizando los factoriales, la fórmula para n sobre k se escribe como

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Si esta expresión se toma como definición, es posible demostrar la relación de recurrencia de los coeficientes binomiales haciendo operaciones en el segundo miembro de dicha recurrencia.

La fórmula del binomio de Newton

Como decíamos antes, observando el desarrollo de las potencias sucesivas de x + y obtenemos

$$
\begin{aligned}
&(x+y)^0 = 1 \\
&(x+y)^1 = x+y \\
&(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \\
&(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
&\dots\dots
\end{aligned}
$$

y los coeficientes son los términos de las diferentes filas del triángulo de Tartaglia. Vamos a demostrar que

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r \text{ , } (*)$$

que se conoce como fórmula del binomio de Newton.

Demostración

Es claro que $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y)$, donde hay n paréntesis.

Por lo tanto el coeficiente de $x^{n-r}y^r$ en el desarrollo final es el número de formas de obtener $x^{n-r}y^r$ cuando se multiplican los n paréntesis. Cada término del desarrollo es el producto de un sumando de cada paréntesis; por lo tanto $x^{n-r}y^r$ se obtiene tantas veces como podamos elegir *y* de r de los n paréntesis (y *x* de los n-r restantes). Pero esto es precisamente el número de maneras de elegir r de los n paréntesis, es decir, $\binom{n}{r}$.

Identidades combinatorias mediante el desarrollo del binomio

Entre la literatura matemática sobre Combinatoria está el casi exhaustivo *Combinatorial Identities,* de John Riordan (Krieger, 1968). En esta sección solamente veremos algunas identidades que se deducen con ayuda del binomio de Newton.

Haciendo en (*) x = y = 1 obtenemos

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n \text{ ,}$$

identidad que tiene una interpretación conjuntista: Un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos, incluyendo el conjunto vacío (que tiene 0 elementos) y el propio conjunto dado.

Haciendo en (*) x = 1, y = -1 obtenemos

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0 \quad (n>0)$$

Consideremos la identidad algebraica

$$(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$$

que escribimos desarrollando ambos miembros

$$\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right\}\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right\}=\sum_{r=0}^{n}\binom{2n}{r}x^r .$$

Igualando los coeficientes de x^n en cada miembro de la identidad tenemos

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{2n}{n},$$

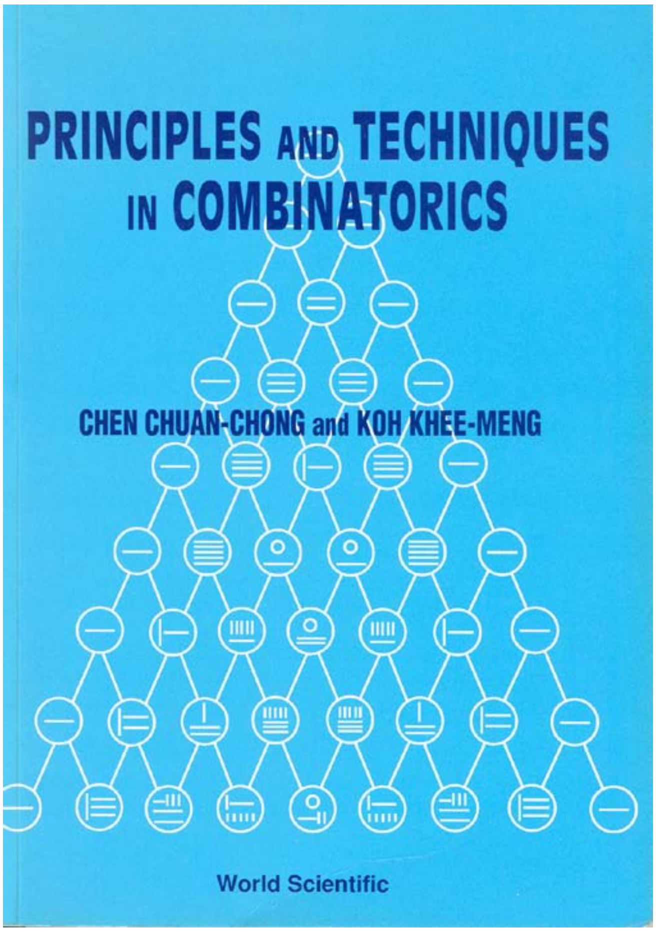
que se puede escribir, ya que cada sumando del primer miembro está formado por coeficientes binomiales *iguales*, en la forma (más sofisticada)

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n},$$

y que es un caso particular de la llamada *identidad de Vandermonde.*

En otro libro clásico (y excelente) de Combinatoria, de *Chen y Koh, Principles and Techniques in Combinatorics, (World Scientific, 1992)* las identidades combinatorias ocupan buena parte de su capítulo 2.

Como curiosidad, la portada de este libro muestra el triángulo aritmético en chino:



El número de soluciones de algunas ecuaciones en enteros no negativos y su relación con la enumeración combinatoria

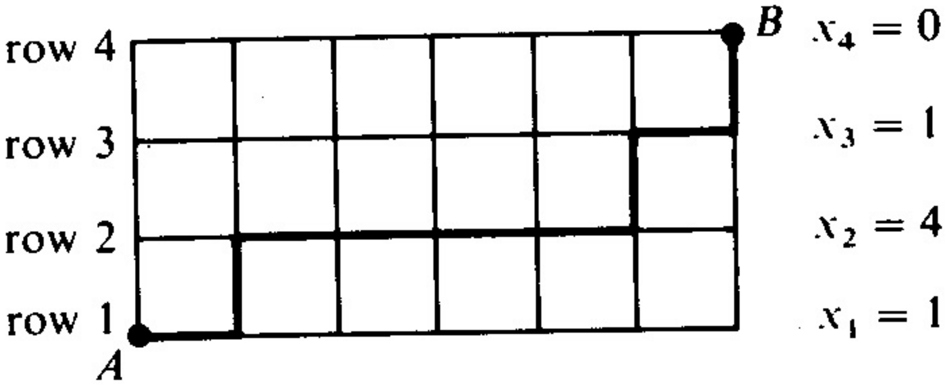
¿Cuál es el número de soluciones enteras no negativas, de la ecuación

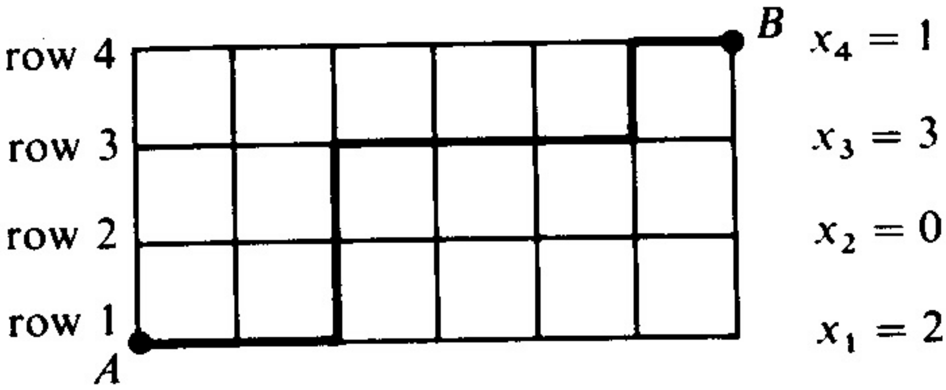
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6\textbf{?}$$

¿Y el de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n?$$

De los varios métodos para resolver este problema elegimos buscar caminos en un retículo rectangular. Por razones que en seguida aparecerán, elegimos un retículo con 4 calles horizontales y seis movimientos hacia la derecha, como se ilustra en la figura siguiente:





Si el número de movimientos en la fila i es x_i, las dos imágenes ilustran dos de las soluciones de la primera ecuación. Claramente hay una correspondencia biunívoca entre los caminos mínimos y las soluciones de la ecuación, y por consiguiente el número de soluciones coincide con el de caminos, que en nuestro caso es $\binom{9}{3} = 84$.

En el caso de la segunda ecuación, la cuadrícula debe tener k calles horizontales y n movimientos hacia la derecha. Un camino mínimo en este caso tiene *n+k-1* movimientos, de los que cualesquiera k-1 deben ser hacia arriba. Por lo tanto el número de soluciones es $\binom{n+k-1}{k-1}$.

La siguiente tabla muestra el número de formas de elegir k objetos de entre n, según que se permitan o no repeticiones y se considere o no el orden:

Elegir k de entre n	ordenados	No ordenados
Sin repeticiones	$\frac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
Con repeticiones	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

De izquierda a derecha, y de arriba abajo, las cuatro expresiones de la tabla cuentan el número de las *variaciones sin repetición, combinaciones sin repetición, variaciones con repetición y combinaciones con repetición, de n elementos, tomados de k en k.*

Permutaciones con repetición y coeficientes multinomiales

El ejemplo que sigue es del libro de Pólya, antes citado.

Sean n casas iguales. Se van a pintar, r de ellas de rojo; s de ellas de amarillo y las restantes t, de verde. ¿De cuántas maneras se pueden asignar colores a las casas?

Primero elegimos las que serán pintadas de rojo: hay $\binom{n}{r}$ maneras de elegirlas; quedan n – r casas, de las que s van a ser pintadas de amarillo, para lo que hay $\binom{n-r}{s}$ formas de elegirlas; y ya no hay más que una forma de elegir las que quedan, que serán verdes, ya que $n=r+s+t$. Por la regla del producto, en total tendremos $\binom{n}{r}\binom{n-r}{s}$ formas de pintar las casas. Se tiene

$$\binom{n}{r}\binom{n-r}{s}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{(n-r)!}{s!(n-r-s)!}=\frac{n!}{r!s!t!}$$

que es simétrica con respecto a r, s y t, como no podía ser menos, pues el problema original lo es.

Esta expresión cuenta el número de *permutaciones con repetición de n elementos, de los que r son iguales entre sí, s son iguales entre sí y t son iguales entre sí, con r+s+t=n.* Para ese número se utiliza la notación

$$\binom{n}{r\quad s\quad t} = \frac{n!}{r!s!t!}$$

que recibe el nombre de *coeficiente multinomial.*

Un segundo ejemplo, tomado del libro de Victor Bryant *Aspects of Combinatorics (Cambridge U.P. 1993):*

¿Cuántos números de 10 cifras se pueden formar escribiendo, en algún orden, las cifras 4,4,4,4,3,3,3,2,2 y 1?

Supongamos, por un momento, que las cifras fueran todas distintas, por ejemplo pintando los cuatros con 4 colores diferentes, los treses con tres colores diferentes y los doses con 2 colores diferentes. Entonces tendríamos 10! números, muchos de ellos repetidos si no se tuviera en cuenta los colores. Si los cuatros los barajamos entre sí, de todas las maneras posibles, hay 4! números que, cuando dejemos de imaginar los números coloreados, dan lugar al mismo número. Por lo tanto después de esto hay $\frac{10!}{4!}$ números donde ya no es posible distinguir los cuatros. Repitiendo el razonamiento con los treses llegamos a $\frac{10!}{4!3!}$ números con los 4s y 3s indistinguibles. Y repitiéndolo con los doses hay $\frac{10!}{4!3!2!}$ números con 4s,3s y 2s indistinguibles. Como solamente hay una cifra 1, este número coincide con $\frac{10!}{4!3!2!1!}$, es decir, 12600 números en las condiciones del problema.

Otra forma alternativa de resolver el problema es la siguiente: Se eligen 4 posiciones de entre las diez disponibles para colocar los cuatros: esto se puede hacer de $\binom{10}{4}$ maneras; a continuación, las tres posiciones para los treses de entre las seis que quedan: $\binom{6}{3}$ maneras; luego las dos posiciones para los doses de entre las tres que quedan, lo que da $\binom{3}{2}$ maneras; y finalmente, en la única posición que todavía falta, se coloca el 1: $\binom{1}{1}$ manera. El principio de la multiplicación (o de *los pastores*) da el resultado final:

$$\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}=12600\,.$$

En general, si $r\geq 2$ y $k_1,k_2,\cdots,k_r$ son enteros positivos cuya suma es n, entonces el número de formas de colocar n cosas en r cajas, con k_1 cosas en la primera caja, k_2 en la segunda, … , k_r en la r-ésima se representa mediante

$$\begin{pmatrix} & & n & & \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r \end{pmatrix}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$$

que es el coeficiente multinomial. La justificación en este caso general de la fórmula anterior es la misma que la empleada antes en el ejemplo.

Los coeficientes multinomiales aparecen en la llamada *fórmula de Leibniz para la potencia de un polinomio:*

$$\left(a_1+a_2+\cdots+a_r\right)^n=\sum_{k_1+\cdots+k_r=n}\begin{pmatrix} & & n & & \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r \end{pmatrix}a_1^{k_1}\cdots a_r^{k_r}$$

en donde la suma se extiende a todos los k_i mayores o iguales que 0 cuya suma es n. El argumento para justificar la fórmula de Leibniz es el mismo que el empleado en la demostración de la fórmula de Newton, *mutatis mutandis*, y no lo repetimos.

Bibliografía

Anderson, I. *A first Course in Discrete Mathematics* *(Springer, 2001)*

Briant, V. *Aspects of Combinatorics (A wide-ranging introduction)* *(Cambridge U.P. 1993)*

Chen,C-C & Koh, K-M. *Principles and Techniques in Combinatorics* *(World Scientific, 1992)*

Pólya, G. & Tarjan,R. & Woods,D. *Notes on Introductory Combinatorics* *(Birkháuser, 2010)*