EL DESAFÍO DE ENSEÑAR ÁLGEBRA LINEAL POR COMPETENCIAS

Claudia GUZNER[1]

Resumen: La idea central es que el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática no se limita a una absorción individual y memorizada de un cuerpo fijo de conceptos descontextualizados y de habilidades procedimentales transmitidas por el profesor, sino que es una construcción colaborativa, de conocimiento significativo y útil, que incluye habilidades de resolución de problemas, que articulan los ambientes cercanos al alumno. A la luz de esta reflexión, este trabajo tiene por finalidad mostrar cómo presentar los contenidos secuencialmente, con el objeto de orientar su profundización, ampliación y aprendizaje; a la vez que contemplar las posibilidades cognoscitivas y afectivas de los estudiantes; atendiendo a la articulación horizontal y vertical para un tratamiento de temáticas que requieren la integración de conceptos provenientes de diversas áreas.

Palabras claves: competencia, aprendizaje, enseñanza.

Si se conviene que la enseñanza es una práctica social que consiste en la mediación entre un sujeto que aprende y un contenido a aprender, queda claro que tanto alumnos como docentes son actores del proceso, cada uno con roles propios y complementarios. Juntos procurarán llegar a una construcción colaborativa de conocimiento significativo, para lo cual habrá que articular ambientes cercanos a los sujetos, enfrentándolos a situaciones nuevas en escenarios auténticos de la vida real, permitiéndoles caracterizar aquello que saben hacer en realidades simuladas o auténticas. Enseñar/ aprender no es identificar aquello que los estudiantes aún no han logrado o les falta sino más bien es conectar entre sí los “saberes” construidos en un sistema jerárquico de interrelaciones o red de significaciones que favorezca un uso creativo y flexible de aquello que se conoce.

Así es que toda propuesta pedagógica deberá enfatizar el saber y el saber hacer en el mismo acto de enseñanza y aprendizaje (Dolz, J. & Ollagnier 2000). Todo esto en un marco de formación integral, en el cual cada individuo se comprometa y responsabilice por su propio aprendizaje y el de sus pares, a partir del intercambio y confrontación de ideas, opiniones, experiencias, en un marco de mutuo respeto.

Queda claro que la oferta educativa tradicional, centrada en la teoría y el saber técnico-conceptual, que sólo propicia una desarticulación entre aquella, la prospección y la práctica, no responde a la mencionada concepción, que persigue que las personas se relacionen con el cómo es o cómo se hace algo a la vez que con el querer hacerlo.

En este contexto, si la *competencia* es un conocimiento que se expresa en un saber hacer o actuar frente a tareas que plantean exigencias específicas (Thierry García, 2001), que supone

[1] Mgter.; Universidad nacional de Cuyo, Argentina; cguzner@frm.utn.edu.ar

conocimientos, saberes y habilidades que emergen en la interacción que se establece entre el individuo y una determinada situación, se propone el *aprendizaje basado en competencias* como un paradigma que promueve más de una estrategia, sin prescribir, sugerir o recomendar, a fin de que el aprendiz no pierda ese espacio de libertad fundamental que permite la acción y su involucramiento profundo en la experiencia educativa planteada.

La educación superior en general, y la matemática en particular, no es ajena a estos planteos. A la luz de las reflexiones previas, este escrito pretende mostrar cómo presentar -en esos ámbitos- los *contenidos* del Álgebra Lineal, con el objeto de orientar su profundización, ampliación y aprendizaje, a la vez que contemplar las posibilidades cognoscitivas y afectivas de los estudiantes, atendiendo a la articulación horizontal y vertical para el tratamiento de temáticas que requieren la integración de conceptos provenientes de diversas áreas.

El escrito ha sido organizado en dos partes. La primera – Introducción – es un espacio de análisis y reflexión en el cual se delimita qué se entiende por *competencia* y por *competencia matemática* en el contexto de la presente investigación. La segunda – Resultados - describe algunas de las actividades que se llevan a cabo en un curso de Álgebra Lineal a nivel universitario en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Cuyo –Mendoza, Argentina-. Finalmente se ofrecen las conclusiones.

1. Introducción: Competencias y competencias matemáticas

1.a Competencias

Se ha dicho que el conocimiento - Figura 1. - es el resultado de una movilización de recursos de índole diversa, asociados a la aparición de esquemas organizados de "*saber, saber hacer y saber ser*".

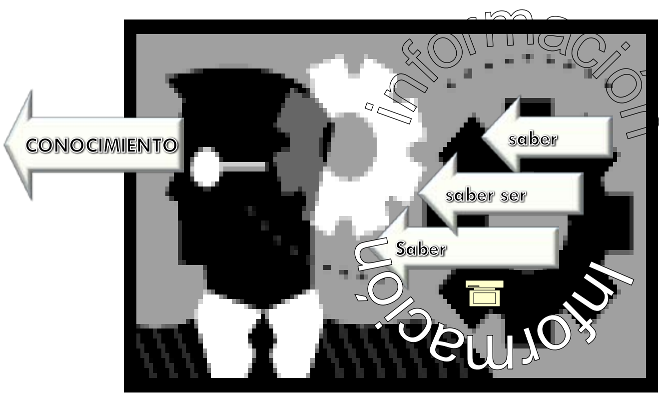


Figura 1. Construcción del conocimiento

Esta visión, que adhiere a la idea del conocimiento no sólo como sinónimo de la aprehensión de un cuerpo rígido de contenidos disciplinares (Delors, 1996), es lo que se conoce como "*aprendizaje por competencias*".

El enfoque tiene una visión global de la situación de aprendizaje y, por tanto, del acto de aprendizaje, el cual, en este contexto, se manifiesta en términos de una combinación de atributos (conocimientos, aplicaciones, capacidades y responsabilidades) que describen el nivel o grado de competencia con que una persona es capaz de utilizarlos (González y Wagenaar, 2003).

Desde una perspectiva estrictamente conceptual (Guzner, 2010), hablar de competencias supone referirse a la capacidad del sujeto que aprende a fin de movilizar los recursos que ha adquirido para afrontar y resolver una situación problema –intra o inter disciplinar-. Involucra, en principio, la selección, movilización y combinación de un conjunto de:

- “conocimientos teóricos”, asociados a criterios de ejecución o desempeño (niveles de dominio) - con los cuales se puede reproducir, decir el qué es, el cómo es, el cuándo acerca de un objeto,
- “habilidades”, como resultado de un proceso de integración que habilita contestar para qué es, cómo se usa ese objeto.

Estas dos cuestiones refieren tanto a la naturaleza específica de un campo disciplinar - o a elementos comunes a cualquier outro-, así como a las capacidades de aprender, de pensar de forma creativa, de tomar decisiones, de resolver problemas, de usar la imaginación, por mencionar algunos. Todo esto sin dejar de lado a cualidades personales como la responsabilidad, la autoestima, la sociabilidad, el autocontrol y la integridad (Goody, 2001).

Estas características delimitan las diferentes dimensiones de la *competencia* -Figura 2. -.

SABER	⇒	▪ conocimiento de un campo disciplinar independientemente de la estructura cognitiva, ▪ abstracción o conceptualización para obtener nuevos conocimientos a partir de los conocimientos previos;
SABER HACER	⇒	▪ movilizar el saber y la experiencia en un contexto particular, ▪ integrar o combinar saberes múltiples y heterogéneos, ▪ analizar, sintetizar, inferir;
SABER SER	⇒	▪ afrontar la vida con ciertas actitudes y valores, dando sentido a las otras dos dimensiones de la competencia, ▪ aprender, aprender a aprender, ▪ comprometerse.

Figura 2. Dimensiones de la competencia.

Así es que la educación basada en competencias se concibe como un modelo abierto que incluye diferentes campos semánticos de los conceptos y procedimientos, así como la reelaboración del conocimiento aprendido en situaciones nuevas, que conduce, a diferencia de los regímenes que promueven una estrategia única, a nuevos significados y a nuevas interpretaciones.

Hacia el interior de las instituciones educativas, la incorporación de este tipo de aprendizaje conlleva considerar implicancias curriculares, didácticas y evaluativas:

a) curriculares, ya que el diseño del currículo no ha de estar orientado sólo al contenido entendido como una cuestión disciplinar - como tradicionalmente se hace -, sino que implica una profunda refuncionalización de lo que se enseña o se espera que se les enseñe a los sujetos, de forma explícita e implícita -Figura 3 -.;

Figura 3. Clasificación de contenidos.

b) didácticas, porque la escolarización no se reduce ya más al contacto con "contenidos de aprendizaje", sino que es la integración significativa de esos contenidos lo que le da sentido;

c) evaluativas, porque el proceso de evaluación transita desde una evaluación por logros hacia una evaluación por procesos, en la cual no se evalúa un resultado aislado, circunstancial, sino todo el proceso de aprendizaje, en un contexto, con determinados sistemas simbólicos, atento a la motivación y desarrollo cognitivo propios de cada sujeto.

Esta concepción provoca cuestionar la formación docente actual, la cual, a la luz de este nuevo paradigma, debería centrarse en lograr una mayor conexión entre los contenidos del currículo escolar y las prácticas docentes que revaloricen la gestión del saber.

La educación basada en competencias - que está estrechamente vinculada con el principio de la comprensión empleada por la escuela de Gardner, en el que la prueba de comprensión no implica ni la repetición de la información aprendida, sino que incluye una aplicación adecuada de los conceptos y principios a problemas que se presentan por primera vez - apunta, como se dijo, a integrar al estudiante en un ambiente de aprendizaje situado en campos acordes a su desarrollo integral como persona.

1.b Competencias matemáticas

Las consideraciones anteriores no son ajenas a la educación matemática. Una sociedad tan cambiante como el actual exige que los ciudadanos posean una cultura matemática básica que les permita, entre otras cosas, abordar exhaustivamente la evolución de la ciencia y las nuevas tecnologías.

Esta nueva realidad hace que, hacia el interior de la comunidad de educación matemática, se comience a tomar consenso que el aprendizaje de la disciplina es un proceso dinámico que tiene lugar en diferentes niveles: cada *saber* se basa en un *saber* anterior, los individuos, sobre núcleos problemáticos que integran su experiencia y su propia reflexión, construyen los nuevos conceptos y las vinculaciones que le dan sentido y aplicabilidad.

En consonancia la enseñanza –de la disciplina- también comienza a revisarse. Se pasa de metodologías transmisionistas, centradas en la figura del profesor como presentador de contenidos en compartimentos estancos, a metodologías centradas en el alumno, que privilegian la solución de problemas por ellos vivenciados, tanto al interior de la matemática misma, como en otras disciplinas (Guzner, Schilardi et. al, 2010).

En este sentido, varios son los autores que dan cuenta que la formación por competencias es un tema coyuntural en el debate académico. El enfoque conceptual y teórico subyacente en el paradigma marca la diferencia entre el contenido enseñado o transmitido: como se dijo, es un modelo abierto que incluye, por un lado, distintos campos semánticos de los conceptos, procedimientos y objetos matemáticos, y, por el otro, la reelaboración del uso aprendido en nuevas situaciones, que conducen a nuevos sentidos y nuevas interpretaciones.

Así es que las tres dimensiones nucleares mencionadas para la competencia en general –SABER, SABER HACER, SABER SER -, podrían identificarse con el reconocimiento significativo del objeto matemático, la potencia para su modelación en contextos diversos y su comunicación, entendida ésta como la interacción social desde la que se construye su significado. Tienen sentido sólo en función del conjunto, aunque se puedan explicitar por separado Su puesta en acto simultánea muestra que un sujeto es competente en matemáticas, son expresión de su competencia matemática.

Figura 4. Operacionalización de la competencia matemática

Aunque no explícitamente dicho, la operacionalización incluye dimensiones metacognitivas – deseo de explorar, investigar, profundizar- ligadas a la reelaboración de significados.

Esta nueva cultura del aprendizaje depende en gran medida del modelo pedagógico que la escuela ofrece a sus alumnos, de los que se requiere, como se ha dicho, construir su propio conocimiento, rechazando actividades mecánicas basadas en esquemas rígidos. Pero también requiere que el docente, en su tarea diaria en el aula, realice importantes esfuerzos de forma tal de hacer este cambio posible.

2. RESULTADOS

2.a Propósito general

Teóricamente, adherir al enfoque en educación matemática, presupone abordar experiencias donde el alumno desarrolla su c*ompetencia* desde la memoria comprensiva, la potencia matemática y la funcionalidad del contenido en sentido amplio. Prácticamente, la implantación del modelo implica la discusión del qué, el cómo, el cuándo.

- Conocimientos?
- Capacidades?

⇒

- Por conceptos?
- Por problemas?

Qué comportamientos se espera provocar?

⇒

- En qué dominios?
- Con qué medios?
- Individualmente?
- Grupalmente?

Figura 5. Momentos de la competencia matemática.

Si lo que se espera es promover no sólo la actividad sino la reflexión sobre la actividad, queda absolutamente claro que la separación que se suele hacer entre “teoría y práctica” consecuencia metodológica de la tradición axiomática – deductiva en la enseñanza de la Matemática - la teoría se memoriza y la práctica se aplica-, de ninguna manera se ajusta al objetivo que se plantea.

Desde la perspectiva docente, la puesta en acto de estas ideas conlleva reflexionar sobre cuestiones relacionadas tanto con la propia praxis como con los procesos que activará un alumno para dar respuesta a la cuestión o cuestiones planteadas. De hecho, aunque estos dos asuntos puedan explicitarse separadamente, las especulaciones teóricas que al respecto se hagan tendrán sentido sólo en función del conjunto.

En cuanto a la primera –la praxis-, fundamentalmente, habrá que analizar, a nivel macro, si las acciones que se emprenden ubican al alumno en el centro de la escena didáctica, si a partir de las situaciones que se ponen en juego el alumno moviliza sus propias acciones simbólicas y concretas y analiza sus producciones en un proceso individual o colectivo.

El docente deberá responder, entre otras, las siguientes preguntas:

- ⇒ se facilita la apropiación de las propiedades de los saberes involucrados?,
- ⇒ se ponen en juego criterios de ejecución?,
- ⇒ se promueve la ejecución de algoritmos?,
- ⇒ se impulsa la reorganización de datos y relación de estos con saberes previos?,
- ⇒ se potencia la capacidad de reconocer patrones que aportan a la resolución de un problema dado?,
- ⇒ se realiza tratamiento y traducción entre diferentes registros de representación semiótica?,
- ⇒ se analiza un enunciado, se comunican sus resultados?,
- ⇒ se conjetura, se argumenta, se valida?,
- ⇒ se escucha, se debate?

Respecto de las segundas –procesos que activan los estudiantes-, a nivel micro, habrá que observar qué posibilidades se ofrecen a los sujetos para ejecutar cuestiones relacionadas con el contenido conceptual abordado, el contexto al que se refiere y la forma en que se socializa.

Producir material educativo bajo esta nueva concepción de la educación es ciertamente un **desafío**. Por varias décadas, un número razonable de textos se han ofrecido que siguen la línea clásica del pensamiento matemático, donde la disciplina se enseña, secuencialmente, por medio de definiciones rigurosas, teoremas y demostraciones cuidadosamente detalladas y exhaustivas.

Esta modalidad no es acorde con la educación matemática del siglo XXI, donde el interés reposa en las formas de *ser y hacer* y en la cual, en consecuencia, los procedimientos deben ser desarrollados de forma tal que promuevan la autonomía de los sujetos, su pensamiento crítico y la cooperación entre ellos.

De acuerdo con las ideas anteriores, se puede decir que el diseño del material innovador para la enseñanza de matemáticas y el aprendizaje de la matemáticas implica dos aspectos: el didáctico y el tecnológico. Para el primero – el segundo de los aspectos está más allá del alcance del presente trabajo-, debe realizarse un sondeo preliminar que tenga en cuenta un análisis:

- epistemológico de los objetos matemáticos,
- de la educación tradicional y sus efectos,

- de las concepciones de los estudiantes, las dificultades y limitaciones que determinan su evolución,
- de las restricciones del campo de la efectiva realización,
- de la especificación de objetivos.

Una propuesta que privilegie el desarrollo de la competencia matemática de una manera significativa del concepto por aprender intentará que, a partir de una situación problema, el estudiante logre, por medio de la utilización de un concepto no formal, la idea de concepto.

2.b El caso particular

Como respuesta a esta descripción general, para el caso particular de la enseñanza del Álgebra Lineal a nivel universitario, se desarrolla un material (Guzner, 2011) especialmente orientado a las titulaciones en Ciencias Económicas. El texto toma como unidades de análisis los contenidos conceptuales mínimos que para esas carreras establece Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina.

Figura 6. Contenidos conceptuales Álgebra Lineal.

Los contenidos, en sentido amplio, se gestionan a la manera de módulos de aprendizaje (Guzner, Del Vecchio, 2012), entendidos éstos como "… la unidad de enseñanza y aprendizaje con sentido completo, que integra los conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes requeridas para el logro de una capacidad, a través del desarrollo de diversas experiencias y actividades complejas, que se relacionan con el contexto real del campo laboral". Cada uno de los módulos contempla cada una de las tres dimensiones de la competencia matemática, integradas en desempeños prácticos que muestran determinados niveles de logro en el desempeño.

La organización macro es por capítulos y la micro, por secciones. Hacia el interior de cada uno de ellas se recurre a diferentes registros de representación semiótica – lenguaje coloquial, lenguaje simbólico, lenguaje computacional, tablas-.

Asimismo, a medida que se avanza en el desarrollo, se retrotrae a saberes abordados en capítulos anteriores y se los trabaja a partir de los nuevos que se están aprendiendo, a fin de mostrar la coherencia interna del Álgebra Lineal. Cabe mencionar que cada sección finaliza con una serie de Ejercicios y Problemas, el primero de la lista una reflexión "algebraica" sobre la apertura de comienzo de capítulo. Los ejercicios, al igual que los ejemplos, se organizan en torno a las tres dimensiones de la competencia matemática.

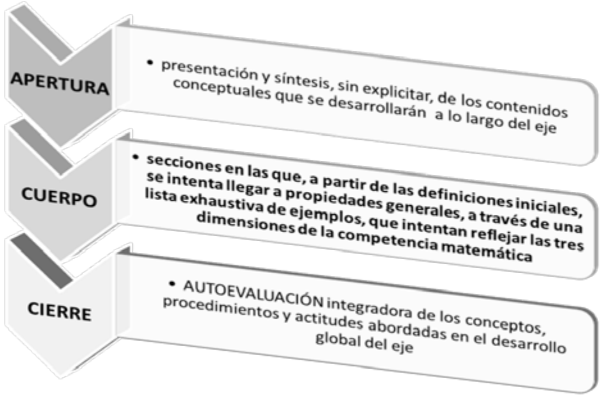


Figura 7. Estructura de cada capítulo

Al finalizar completamente el abordaje, el usuario deberá estar en condiciones de extender el dominio y responder las siguientes preguntas:

⇒ ¿Estoy en condiciones de resolver el ejercicio?

⇒ ¿Estoy en condiciones de definir el concepto?

⇒ ¿Estoy en condiciones de distinguir entre... y ....?

⇒ ¿Estoy en condiciones de dar una conclusión?

⇒ ¿Estoy en condiciones de discutir las conclusiones?

⇒ ¿Estoy en condiciones de explicar el procedimiento?

⇒ ¿Estoy en condiciones retener la información adquirida?

A continuación se ejemplifica la reseña anterior en el caso particular del abordaje del contenido conceptual **Vectores en el Plano y en el Espacio**. La propuesta corresponde al Capítulo 3 de la mencionada obra (Guzner, 2012). A fin de dejar claro qué se quiere significar con *la reelaboración del conocimiento aprendido en nuevas situacion*es, se muestran en primer lugar las actividades de apertura de los capítulos previos – Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales, Figuras 8. y 9. respectivamente-.

Al consultar http://mip.cba.gov.ar encontrará los sectores y subsectores en que se divide la economía de la provincia de Córdoba y las transacciones intersectoriales en miles de pesos corrientes a precios de mercado en un año dado.

……………………………………………………………………………………………………….

Si los sectores de la mencionada economía se agrupan sólo en tres: Sector I o PRIMARIO DE ACTIVOS EXTRACTIVOS, Sector II o MANUFACTURERO y Sector III o de SERVICIOS no stockeable, responda:

i. a qué sector de estos tres pertenecen los subsectores de 2.?
ii. el subsector ELECTRICIDAD, pertenece al Sector MANUFACTURERO?
iii. cómo se interpreta el siguiente cuadro de transacciones intersectoriales?

	SECTOR I	SECTOR II	SECTOR III
SECTOR I	2.392.169,32 4	2.758.564,737	284.330,6231
SECTOR II	290.720,717	2.414.017,046	1.350.511,12
SECTOR III	577.262,452	1.188.497,866	4.666.116,526

También se obtienen los siguientes datos, que representan, respectivamente, las demandas internas de

cada uno de los Sectores I, II y III : 11.396.905,7; 17.278.884,7 y 25.221.688,7.

iv. Construya un nuevo cuadro que incorpore estas cantidades.

v. Diga qué representan los valores: 16.831.970,4; 21.334.133,6 y 31.653.565,5; $\dfrac{290.720{,}717}{16.831.970{,}4}$.

vi. Responda qué representa el siguiente cuadro llamado matriz de *coeficientes técnicos*.

	0,142120576	0,129302872	0,008982578
	0,017271936	0,113152805	0,042665371
	0,034295596	0,055708748	0,147412035

Si se supone que los coeficientes técnicos se mantienen constantes durante dos años consecutivos, y x_i es la compra total que subsector i realiza en esos años, responda qué representa:

vii. $x_1 \begin{bmatrix} 0{,}142120576 \\ 0{,}017271936 \\ 0{,}034295596 \end{bmatrix}$

viii.

$$\begin{array}{lllll} 0{,}142120576\ x_1 & + & 0{,}129302872\ x_2 & + & 0{,}008982578\ x_3 \\ 0{,}017271936\ x_1 & + & 0{,}113152805\ x_2 & + & 0{,}042665371\ x_3 \\ 0{,}034295596\ x_1 & + & 0{,}055708748\ x_2 & + & 0{,}147412035\ x_3 \end{array}$$

Figura 8. Actividad inicial Matrices

Si los sectores y subsectores en que se divide la Economía de la provincia de Córdoba se agrupan sólo en tres y se consideran las demandas internas y los valores agregados correspondientes, se obtiene la siguiente matriz:

				demanda directa y_j	valor de producción x_i
	2392169	2758565	284331	1139690	1683197
	290721	2414017	1350511	1727888	2133413
	577262	1188498	4666117	2522168	31653566
	3260152	6361080	6300958		
valor agregado	13571818	14973054	25352607		
valor producción	16831970	21334134	31653566		

- Para cada uno de los tres sectores, escriba una expresión que represente el valor de producción x_i i = 1, 2, 3 en función de las transacciones x_{ij} que realiza cada sector i para i = 1, 2, 3 con cada sector j para j = 1, 2, 3.

…………………………………………………………………………..…………………………

- Verifique que $\begin{bmatrix} (1-0{,}1421) & -0{,}1293 & -0{,}0089 \\ -0{,}0172 & (1-0{,}1131) & -0{,}0426 \\ -0{,}0342 & -0{,}0557 & (1-0{,}1474) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12536596{,}3 \\ 19006773{,}1 \\ 27743857{,}6 \end{bmatrix}$

  representa lo expresado en i.

………

- Interprete la igualdad matricial X = AX + Y si se considera que las matrices:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

son respectivamente la matriz de valores de producción esperados de una economía divida en n sectores, la de coeficientes técnicos y la demandas internas.

Figura 9. Actividad inicial Sistemas de Ecuaciones Lineales

Los vectores en R^2 y R^3 se "inducen" a partir de un modelo hipotético – Figura 10.-:

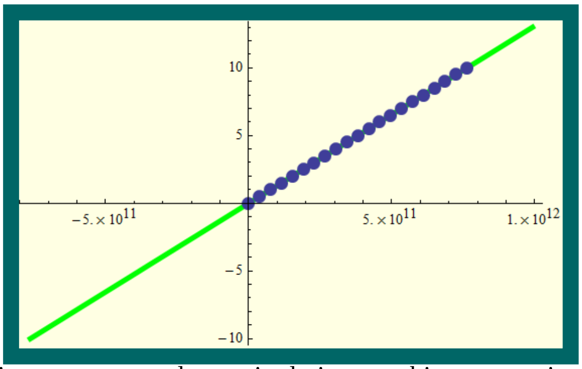
Suponga un modelo hipotético de una economía sencilla sin demanda externa de los sectores PESCA y PESCADO de la Provincia de Córdoba. Considere el problema de determinar las precios por unidad p_A y p_B de cada uno de los subsectores PESCA y PESCADO de la Provincia de Córdoba de forma tal que el intercambio encuentre un estado de equilibrio.

i. Responda si *estado de equilibrio* se alcanzará si el precio unitario que paga el sector PESCA es $2{,}28861\times10^{11}$ y el que paga el sector PESCADO es 3 en las unidades de $ correspondientes?

Diga si los siguientes pares de números representan los precios que cada uno de los sectores puede imponer en las unidades de $ correspondientes a fin de alcanzar el *equilibrio*:

($-6{,}48439\times10^{11}$; -8.5), ($1{,}1443\times10^{11}$; 1.5), ($8{,}39157\times10^{11}$; 11), ($5{,}72152\times10^{11}$; 7.5), (0, 0)

ii. por qué los precios que cada uno de los sectores puede imponer a fin de alcanzar el *equilibrio* pertenecen al conjunto de puntos cuya gráfica es:



iii. En relación a i., si se supone que la matriz de intercambio se mantiene constante por cuatro años, y que los siguientes pares de números representan los precios unitarios en las unidades correspondientes de $ que cada uno de los subsectores PESCA y PESCADO en ese orden pagan a lo largo de esos cuatro años respectivamente: (4,19578×1011; 5.5), (4,57722×1011; 6), (4,95865×1011; 6.5), (5,34009×1011; 7)

………

Suponga un modelo hipotético de una economía sencilla sin demanda externa de los sectores CULTIVOS DE CEREALES, OLEAGINOSAS Y PASTOS FORRAJEROS; CULTIVO DE HORTALIZAS, LEGUMBRES, FLORES Y PLANTAS ORNAMENTALES; PRODUCCION DE SEMILLAS

iv. Responda si estado de equilibrio se alcanzará si: los precios unitarios son respectivamente $p_A = 32.3978$, $p_B = 1.61327$ y $p_C = 1$ en las unidades de $ correspondientes? los precios unitarios son respectivamente $p_A = 1$, $p_B = 1.61327$ y $p_C = 32.3978$ en las unidades de $ correspondientes? los precios unitarios son respectivamente $p_A = 145.79$, $p_B = 7.25974$ y $p_C = 4.5$ en las unidades de $ correspondientes? los precios unitarios son respectivamente $p_A = 0$, $p_B = 7.25974$ y $p_C = 4.5$ en las unidades de $ correspondientes?

…………………………………………………………………..……………………………………

v. Diga si las siguientes ternas de números representan los precios unitarios que cada uno de los sectores puede imponer en las unidades de $ correspondientes a fin de alcanzar el equilibrio:

- (-64.7956; -3.22655; -2)
- (0, 0, 0)
- (16.1989; 0.806637; 0.5)
- (161.989; 8.06637; 5)

vi. Diga por qué los precios que cada uno de los sectores puede imponer a fin de alcanzar el equilibrio pertenecen al conjunto de puntos: $\mathscr{P} = \{(x, y, z) \ / \ 0{,}8x - 10y - 10z = 0 \quad x, y, z \in R\}$ cuya gráfica es

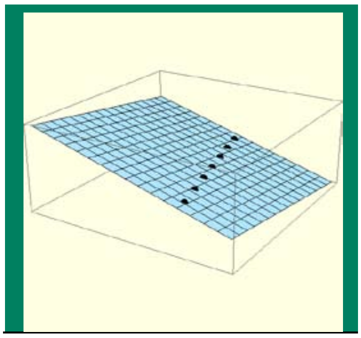


Figura 10. Actividad inicial Vectores en R^2 y R^3

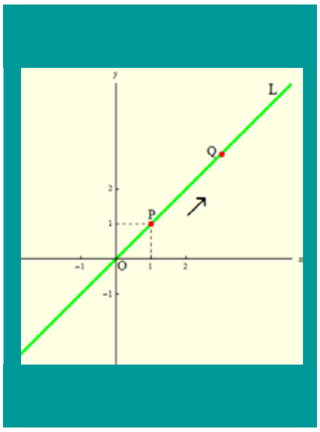
En síntesis, la apertura del módulo coincide con la modelación de dos problemas con dos sistemas, respectivamente, con dos y tres incógnitas. Se analizan pares y ternas de números reales y se los asocia con soluciones a los problemas. También se trabaja en registro gráfico. Se hacen suposiciones sobre las soluciones y se "opera" con ellas.

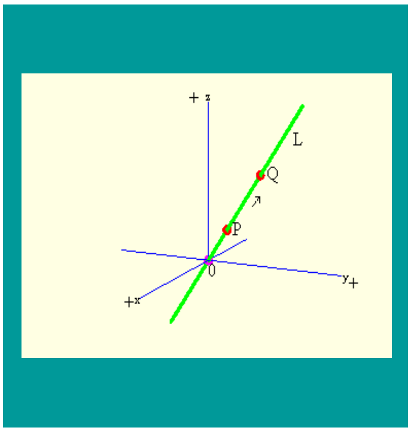
El cuerpo del capítulo se compone de definiciones, propiedades, ejemplificación y ejercitación, como de manera sucinta se detalla a continuación. La descripción discurre sobre las distintas estrategias y registros que, a lo largo del módulo, se utilizan como recurso didáctico.

Definición	Un **segmento** de **recta dirigido** es toda **porción** de **recta entre dos puntos** dados, llamados respectivamente **punto inicial** y **punto final** del segmento**.**

- En símbolos, se anota $\overrightarrow{PQ}$, si **P** es el **punto inicial** y **Q** el **punto final** del segmento de recta $\overrightarrow{PQ}$.
- Gráficamente $\overrightarrow{PQ}$ se **representa** sobre un **sistema** de **ejes ortogonales.**

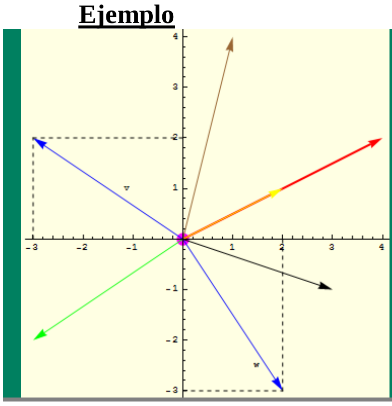
- Se llama:
    - ejes coordenados al sistema de ejes ortogonales;
    - **dirección** de $\overrightarrow{PQ}$ a la recta que contiene a $\overrightarrow{PQ}$ El sentido de $\overrightarrow{PQ}$ queda implícito al hablar respectivamente de un punto inicial y un punto final de $\overrightarrow{PQ}$. Usualmente se anota con la letra L.
    - origen de coordenadas al punto de intersección de los ejes coordenados. Usualmente se anota con el símbolo 0;
    - coordenadas de un punto a las proyecciones del punto sobre cada uno de los ejes coordenados.
- Cuando los ejes coordenados son dos, $\overrightarrow{PQ}$ es un segmento de recta dirigido en el PLANO o Espacio Bidimensional.Usualmente, se denomina abcisa y ordenada a las coordenadas de un punto en el PLANO.
- Las coordenadas del origen de coordenadas en el PLANO son 0 y 0 –.
- Cuando los ejes coordenados son tres, $\overrightarrow{PQ}$ es un segmento de recta dirigido en el ESPACIO o Espacio Tridimensional
- Las coordenadas del origen de coordenadas en el ESPACIO son 0, 0 y 0





…………………………………………………………………………………………..

Ejemplo

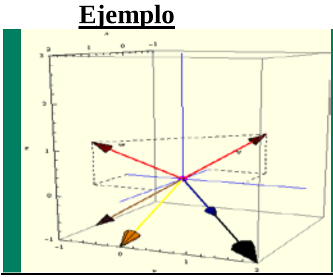


La Figura muestra una colección de vectores de $\mathbf{R}^2$.

- ➢ $v \in \mathbf{R}^2$, v = (-3, 2).
- ➢ $w \in \mathbf{R}^2$, w = (2,-3).
- ➢ Los vectores v y w son distintos.

……………………………………………………………………………………………

Ejemplo



La Figura muestra una colección de vectores de R^3**.**

- ➢ **$v \in R^3$, v = (-1, 1, 1).**
- ➢ **$w \in R^3$, w = (1, -1, 1).**

Los vectores v y w son distintos.

…………………………………………………………………………………………………

Ejemplo

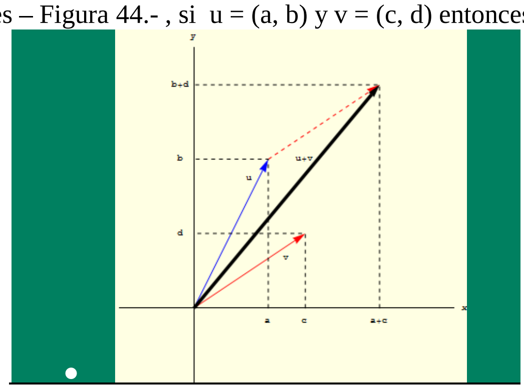
i. Con la sola información que $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & a_{13} \\ 3 & 2 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{bmatrix}$, es suficiente que $\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$ sea el vector nulo de $\mathbf{R}^3$ para afirmar que A es una matriz no inversible cuyas dos primeras columnas son los vectores u $= \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. det A = 0;

ii. Con la sola información que $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & a_{13} \\ 3 & 2 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{bmatrix}$, es necesario que $14a_{33} + a_{23} + 3a_{13} \neq 0$ para que A sea una matriz inversible. Si $14a_{33} + a_{23} + 3a_{13} = 0$, la matriz A tiene sólo 2 pivotes.

………

Definición	La **suma** de dos vectores **u, v** de $\mathbf{R}^2$ es otro **vector** de $\mathbf{R}^2$ que se obtiene **sumando** a **u** un vector **equivalente** a **v** con **extremo inicial** en el **extremo final** de **u**.

- Se anota u + v a la suma de los vectores u, v.
- Usando componentes – Figura 44.- , si u = (a, b) y v = (c, d) entonces u + v = (a+c, b+**d).**

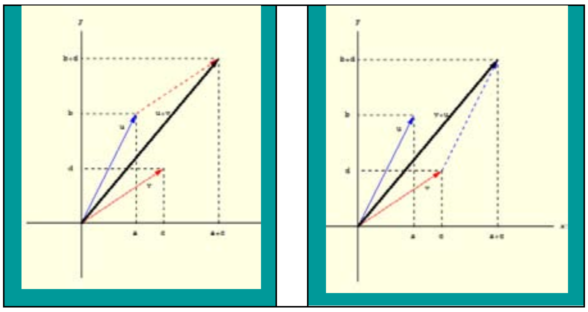


Debe quedar claro que la notación **u + v** hace **referencia** a la **suma** de **dos vectores**, en tanto que las notaciones **a + c** y **b + d** hacen **referencia** a la **suma** de **números reales**. Habrá que diferenciarlos según el contexto en el cual aparezcan

………

Propiedad	i. La suma de vectores de R^2 es conmutativa. ii. La suma de vectores de R^2 es asociativa. iii. La suma de vectores de R^2 admite elemento neutro. iv. Los **vectores** de $\mathbf{R}^2$ admiten **opuesto** respecto de la **suma** de vectores**.**

- Para i, en símbolos: u, v ∈ R2 → u + v = v + u
- Demostración**:**
  - Algebraica: como cada vector de R2 se puede identificar con una matriz 2x1, la demostración algebraica es análoga a la de la conmutatividad de la suma en ese caso.
  - Gráfica: es suficiente analizar qué sucede al realizar las sumas “u + v” y “v + u”.



………

Propiedad	Es **suficiente** que el **producto de un escalar por un vector** sea el **vector nulo** para que el **escalar** sea **cero o** el **vector nulo.**

- La condición es trivialmente necesaria.
- Las demostraciones geométricas son análogas al caso R2.
- Como cada vector de R3 se puede identificar con matriz de orden 3x1, las demostraciones algebraicas son análogas a las de ese caso.

………

Ejemplo

Se sabe que un agente de bolsa registra los valores máximos y mínimos semanales del precio de las acciones de tres compañías I, II y III.

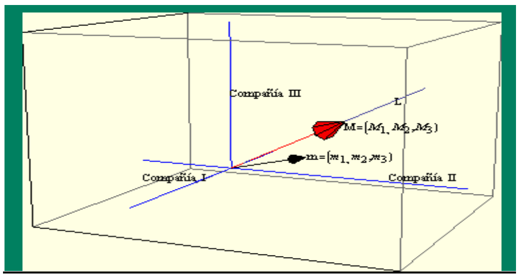
i. El vector M = (M_1, M_2, M_3) representa los valores máximos semanales de las acciones de tres compañías I, II y III.

ii. El vector m = (m_1, m_2, m_3) representa los valores mínimos semanales de las acciones de las mismas tres compañías I, II y III.

iii. Los vectores que tienen su extremo final sobre la recta L representan los valores máximos de las tres compañías en una semana dada, si los mismos cambiaran su valor en la misma proporción.

iv. El vector $\frac{1}{2}$(M + m) representa los valores semanales promedio del precio de las acciones de las tres compañías mencionadas.

v. El vector $((0.15\ M + 0.05\ m)$ representa los valores semanales promedio del precio de las acciones de las tres compañías mencionadas, si se espera que, en una semana dada, los valores máximos se incrementen por igual en un 30% y los mínimos, en un 10%.



………

Propiedad	Si **u no** es el **vector nulo** de $\mathbf{R}^3$, v = $(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u})$ es un vector **unitario.**

- Tácito, v es un vector unitario en la dirección y sentido de u.
- En símbolos: $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3 \wedge \mathbf{u} \neq \mathbf{O} \rightarrow \left\| \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u} \right\| = 1$.

Demostración:

1.	$\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3 \wedge \mathbf{u} \neq \mathbf{O}$	
2.	u = (a, b, c) con a ≠ 0	De 1., sin pérdida de generalidad
3.	$\|u\| = +\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	De 2., por definición de norma
4.	$\|u\| \neq 0$	De 2. y 3.
5.	$\frac{1}{\|u\|} \in \mathbf{R}$	De 4.
6.	$\frac{1}{\|u\|}\,u = \left(\frac{a}{+\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{+\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{+\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$	De 2. y 5.
7.	$\left\|\frac{1}{\|u\|}u\right\| = \sqrt{\frac{a^2}{(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2} + \frac{b^2}{(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2} + \frac{c^2}{(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2}}$	De 6., por definición de norma
8.	$\left\|(\frac{\mathbf{1}}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}\right\| = \mathbf{1}$	De 7., operando

……………………………………………………………………………………………

Ejercicios y Problemas

1. Identifique las tareas que en los ítemes 1/8 de comienzo de capítulo corresponden a los conceptos de:
   - vector;
   - vector en el PLANO;
   - vector en el ESPACIO;
   - componentes.

……………………………………………………………………………………………

2. Dados los vectores u = (-1, 3, 4) y v = (5, 0, -1), construya, de ser posible:

i la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones homogéneo compatible determinado;

ii la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones compatible indeterminado;

iii la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones a veces incompatible.

……………………………………………………………………………………………

3. Dado el vector u = (1, ….) en el PLANO, indique en cada caso si es posible completar la segunda componente de u de forma tal que se cumplan las condiciones que se listan a continuación. Si su respuesta es afirmativa, muestre u.

i. $\|u\| = 1$; ☐

ii. $\|u\| = 2$ y la dirección del vector u es la recta de ecuación y = 2x; ☐

iii. u = (0, 1); ☐

iv. la dirección del vector u es la recta de ecuación y = 3x; ☐

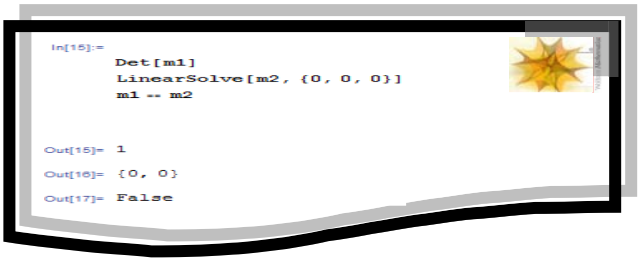
v. Los vectores u y v = (-1, -1) tienen la misma dirección. ☐

……………………………………………………………………………………………

4. Escriba, de ser posible, una condición:
i. suficiente pero no necesaria para que el producto de un escalar por un vector de R^2 sea el vector nulo de R^2;
ii. necesaria para que un vector de R^2 sea combinación lineal de un conjunto de vectores de R^2 dados;
iii. necesaria para que el vector nulo de R^2 se pueda escribir como combinación lineal de un conjunto de vectores de R^2;
iv. necesaria pero no suficiente para que un vector de R^2 sea unitario.
....

5. Con la sola información que proporciona la siguiente lista Input/Output en referencia a dos matrices M_1 y M_2, responda Sí, NO, NO SE SABE.

i.	Las columnas de M1 son vectores de R3;	☐
ii.	Si las columnas de M1 son vectores de R3, las filas también lo son;	☐
iii.	Las columnas de M2 son vectores de R3;	☐
iv.	M2 es una matriz inversible;	☐
v.	Las columnas de M2 son vectores de R3 de igual dirección.	☐



3. DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

El surgimiento de un nuevo modelo productivo, basado en un uso intensivo del conocimiento, requiere evaluar la gestión del saber y la información. Sin perder de vista el horizonte de la calidad en educación formal o informal, o el interés y los efectos que aquella tiene sobre aspectos personales o colectivos de los sujetos, una adaptación a la realidad actual aparece como esencial y se considera que el enfoque por competencias responde a estas nuevas exigencias del contexto.

Bajo este marco es que se reportan algunos resultados de una investigación educativa, llevada a cabo durante los últimos años, acerca de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática de manera experimental, con aplicaciones en el mundo real, usando el mencionado enfoque.

Como resultado, se ha desarrollado un texto completo de Álgebra Lineal cuya validación fue llevada a cabo por profesores y estudiantes universitarios, así como por profesores de enseñanza media. La retroalimentación de esos cotejos ha sido incorporada al texto, pudiéndose afirmar que tanto unos como otros han sido asimilado y aceptado el enfoque.

Se cree que de esta forma se ha realizado una contribución a las acciones que deberían llevarse a cabo en la educación matemática en el siglo XXI, a modo de potenciar en los estudiantes habilidades en saber, saber hacer y saber ser. Se sostiene que con este aporte los estudiantes tendrán una visión más "viva", "realista" y "accesible" del Álgebra Lineal.

No obstante, una real reconversión en la enseñanza de la Matemática todavía está muy distante. Muchos textos del tipo del que aquí se ha presentado deberían ser escritos y diseminados a gran escala, a la vez que privilegiar una *profesionalización* de la carrera docente.

En cuanto a los logros, no se puede decir que sean representativos de todos los alumnos, o de todas las instituciones, o del plan de estudios completo, pero en nuestra opinión es una buena aproximación a las cuestiones planteadas. La reforma que se propone deberá ampliarse a otros actores del sistema educativo, así como a la enseñanza de otras áreas de la misma disciplina.

Referencias

Barnett, R. (2001) Los límites de la competencia. El conocimiento, la educación superior y la sociedad. Gedisa.

Delors, J. (1996) La educación encierra un tesoro. Santillana Unesco.

Dolz, J. & Ollagnier, E. (2000). La notion de compétence: nécessité ou vogue éducative. Raisons éducatives, vol.1-2(2). De Boeck Université.

Gonczi, A. (2002) Teaching and Learning of the Key Compete*ncies*. Presentation at DeSeCo's 2nd International Symposium. Neuchâtel, Switzerland. Swiss Federal Statistical Office.

Goody, J. (2001). Competencies and Education: Contextual Diversity. In D. S. Rychen & L. H. Salganik (Eds.), Defining and Selecting Key Competencies (pp. 175–190). Hogrefe & Huber.

González, J. Y Wagenaar, R. (2003). Tuning Educational Structures in Europe. Final Report. Phase 1. Bilbao: Universidad de Deusto. Graó.

Guzner, C. & Del Vecchio, S. (2008) Aproximaciones conceptuales a la noción de competencias. Actas Jornadas FCE-UNCuyo.

Guzner, C., Schilardi, A. et al. (2010) Un aporte a la formación docente desde la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la integración de las NTIC´s a las prácticas aúlicas. En edUTecNe (Ed.) La tecnología educativa al servicio de la educación tecnológica.pp. 283-311.

Guzner, C. (2010) Un estudio descriptivo explortorio en relación a las competencias y la teoría curricular de la enseñanza de la Matemática. En EDIUNC (çed.) Educación basada en competencias. Cap. 3.

Guzner, C. (2011) Álgebra Lineal para estudiantes de Ciencias Económicas. Talleres gráficos FCE- UNCuyo

Guzner, C. y Del Vecchio, S. (2012) La concreción del enfoque basado en competencias. EAE.

IBERFOP-OEI, (1998) Metodología para definir competencias. CINTER/OIT.

Le Boterf, G. (2000*)* Ingeniería de las competencias. Gestión.

Morin, E. (2000) Los siete saberes necesarios para la educación del futuro. Paidós.

Perrenoud, P. (1999) Construir competencias desde la escuela. Dolmen.

Rue, J. (2002) Qué enseñar y por qué. Elaboración y desarrollo de proyectos de formación. Paidós.

Thierry García, D. (2001) La educación y capacitación basadas en competencias. Modelos y metodologías. Revista Iberoamericana de Educación.