SOLUCIÓN A TRES PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA COMPETICIÓN MATEMÁTICA MEDITERRÁNEA 2012

PROBLEMA 1

Dado el número $\alpha > 0$, se considera la sucesión infinita definida por $x_1 = 1$, y para todo $n \geq 1$,

$$\alpha x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}.$$

Determinar el menor α para el cual todos los términos de esta sucesión son números reales positivos.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Claramente, $x_2 = \alpha - 1$, mientras que para todo $n \geq 2$, $x_{n+1} = \alpha(x_n - x_{n-1})$. La sucesión tiene entonces ecuación característica

$$\rho^2 - \alpha\rho + \alpha = 0, \qquad \text{con raíces} \qquad \rho_\pm = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha}}{2}.$$

Si ambas raíces son iguales, es decir, $\alpha = 4$, tenemos que $\rho = 2$, y entonces $x_n = (A+Bn)2^n$ para ciertas constantes A, B, y para que $x_1 = 1$ y $x_2 = \alpha - 1 = 3$, tras algo de álgebra se obtiene $A = B = \frac{1}{4}$, es decir, $x_n = (n+1)2^{n-2}$. Esta expresión es claramente positiva para todo entero positivo n.

Si ambas raíces son distintas, entonces $x_n = A{\rho_+}^n + B{\rho_-}^n$. Para que $x_1 = 1 = A\rho_+ + B\rho_-$ y $x_2 = \alpha - 1 = A{\rho_+}^2 + B{\rho_-}^2$, se obtiene tras algo de álgebra que $A = \frac{\rho_+}{{\rho_+}^2 - {\rho_-}^2}$, $B = -\frac{\rho_-}{{\rho_+}^2 - {\rho_-}^2}$, es decir,

$$x_{n-1} = \frac{{\rho_+}^n - {\rho_-}^n}{2\alpha\sqrt{\alpha^2 - 4\alpha}} = \frac{{\rho_+}^n - {\rho_-}^n}{{\rho_+}^2 - {\rho_-}^2}.$$

Si $\alpha > 4$, entonces ρ_+, ρ_- son reales con $\rho_+ > \rho_- > 0$ por ser $\sqrt{\alpha^2 - 4\alpha} < \alpha$, luego ${\rho_+}^n - {\rho_-}^n$ es real positivo para todo entero positivo n, en particular también para $n = 2$, con lo que x_{n-1} es el cociente de dos reales positivos, luego real positivo.

Nos resta entonces analizar sólo el caso $\alpha < 4$. Pero en ese caso, nótese que ρ_+, ρ_- son complejos conjugados con módulo

$$|\rho| = \frac{\sqrt{\alpha^2 + (4\alpha - \alpha^2)}}{2} = \sqrt{\alpha},$$

es decir, podemos escribir $\rho_\pm = \sqrt{\alpha}\,(\cos\beta \pm i \sin\beta)$, donde i es la unidad imaginaria, y $0 < \beta < 90°$ es un ángulo del primer cuadrante tal que $\cos\beta = \frac{\sqrt{\alpha}}{2}$ y $\sin\beta = \frac{\sqrt{4-\alpha}}{2}$. Tenemos entonces, por la fórmula de De Moivre, que

$$x_{n-1} = \left(\sqrt{\alpha}\right)^{n-3} \frac{\sin(n\beta)}{\sin\beta}.$$

Luego para que todos los términos de la sucesión fueran positivos, $\sin(n\beta)$ tendría que ser siempre positivo, es decir, el ángulo $n\beta$ debería permanecer siempre en el primer y segundo cuadrante. Pero como $0 < \beta < 90°$, existe un N mínimo tal que $N\beta > 180°$, siendo además $(N-1)\beta < 180°$, luego $N\beta < 180° + \beta < 270°$, y $N\beta$ está en el tercer cuadrante. Luego para este N, se tiene $x_{N-1} < 0$.

Concluimos entonces que x_n es real positivo para todo entero positivo n, si y sólo si $\alpha \geq 4$, y el valor buscado es $\alpha = 4$.

PROBLEMA 2

Sean α, β, γ los ángulos de un triángulo acutángulo ABC. Probar que

$$\frac{1}{3}\sum_{\text{cíclica}} \frac{\tan^2\alpha}{\tan\beta\tan\gamma} + 3\left(\frac{1}{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma}\right)^{\frac{2}{3}} \geq 2.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Denotemos por comodidad $u = \tan\alpha$, $v = \tan\beta$ y $w = \tan\gamma$, donde u, v, w son reales positivos por ser ABC acutángulo. Es conocido (o fácilmente demostrable) que $u + v + w = uvw$ por ser las tangentes de un triángulo, con lo que llamando respectivamente A, G a las medias aritmética y geométrica de u, v, w, tenemos por la desigualdad entre ambas, que

$$G^3 = uvw = u + v + w = 3A \geq 3G, \qquad A \geq G \geq \sqrt{3},$$

con igualdad si y sólo si ABC es equilátero con $u = v = w = \sqrt{3}$. Como $A \geq \sqrt{3}$, claramente la siguiente desigualdad es más fuerte que la inicialmente propuesta:

$$\frac{1}{3}\sum_{\text{cíclica}} \frac{\tan^2\alpha}{\tan\beta\tan\gamma} + 27\left(\frac{1}{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma}\right)^{2} \geq 2.$$

Demostraremos esta desigualdad. Para ello, notemos en primer lugar que se puede reescribir como

$$\frac{u^3+v^3+w^3}{3G^3} + \frac{27}{G^6} \geq 2.$$

Pero por la desigualdad entre medias aritmética y cúbica aplicada a u, v, w, tenemos que

$$\frac{u^3+v^3+w^3}{3} \geq \left(\frac{u+v+w}{3}\right)^3 = \left(\frac{uvw}{3}\right)^3 = \frac{G^9}{27},$$

con lo que nos basta con demostrar que

$$\frac{G^6}{27} + \frac{27}{G^6} \geq 2,$$

claramente cierto en virtud de la desigualdad entre medias, y con igualdad si y sólo si $G^6 = 27$, o $G = \sqrt{3}$. Queda pues demostrada la desigualdad más fuerte que la inicialmente propuesta, y dándose la igualdad en ambas claramente si y sólo si ABC es equilátero.

PROBLEMA 4

Sea O el circuncentro y R el radio de la circunferencia circunscrita de un triángulo ABC, y denotemos por $(O; R)$ a esta circunferencia. Sea k_1 una circunferencia tangente a las semirrectas $(AB$ y $(AC$ y también tangente internamente a $(O; R)$. Sea k_2 una circunferencia tangente a las semirrectas $(AB$ y $(AC$ y además tangente exteriormente a $(O; R)$. Llamamos A_1, A_2 a los centros respectivos de k_1, k_2. Demostrar que

$$(OA_1 + OA_2)^2 - A_1A_2{}^2 = 4R^2.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Claramente, el incentro I de ABC, A_1 y A_2, están sobre la bisectriz del ángulo $\angle BAC$. Al mismo tiempo, O y A_1 están alineados con el punto de tangencia de $(O; R)$ y k_1, con lo que $OA_1 = R - \rho_1$, siendo ρ_1 el radio de k_1, y de forma análoga $OA_2 = R + \rho_2$. Finalmente, como k_1, k_2 son resultado de aplicar una homotecia a la circunferencia inscrita a ABC, con centro en A, tenemos que $\frac{AA_1}{AI} = \frac{\rho_1}{r}$, y $\frac{AA_2}{AI} = \frac{\rho_2}{r}$, donde r es el inradio de ABC. Con todo lo anterior, el resultado a demostrar es equivalente a

$$(2R + \rho_2 - \rho_1)^2 - \frac{IA^2}{r^2}(\rho_2 - \rho_1)^2 = 4R^2,$$

o tras algunas simplificaciones, y usando que $\rho_2 - \rho_1 \neq 0$, el problema se reduce a demostrar que

$$4Rr \cdot IA = (IA^2 - r^2)(AA_2 - AA_1).$$

Consideremos ahora los triángulos OAI, OAA_1, OAA_2. Claramente $\angle OAI = \angle OAA_1 = \angle OAA_2$ por estar I, A_1, A_2 en la bisectriz de $\angle BAC$. Se tiene entonces por el teorema del coseno que

$$\frac{OA^2 + AI^2 - OI^2}{2OA \cdot AI} = \frac{OA^2 + AA_1^2 - OA_1^2}{2OA \cdot AA_1} = \frac{OA^2 + AA_2^2 - OA_2^2}{2OA \cdot AA_2},$$

con lo que usando $OI^2 = R^2 - 2Rr$, llegamos a

$$AA_1 = \frac{AI^3}{AI^2 - r^2}, \qquad AA_2 = \frac{(4Rr + AI^2)AI}{AI^2 - r^2},$$

de donde se sigue tras sustitución el resultado deseado.

Nota: El círculo k_1 se suele llamar incírculo mixtilíneo (*mixtilinear incircle*), y como corolario de uno de los pasos intermedios de esta solución, hemos hallado por métodos elementales la relación de proporcionalidad entre éste y el incírculo:

$$\frac{AA_1}{AI} = \frac{\rho_1}{r} = \frac{AI^2}{AI^2 - r^2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}}.$$

A partir de esta relación, es sencillo comprobar que la perpendicular a la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ por I, corta a los lados AB, AC en los puntos de tangencia de k_1, quedando además establecido un método de construcción del incírculo mixtilíneo.