<u>Problema 222</u> (propuesto por el editor)

ABC es un triángulo; P es un punto variable tal que $m.BP.sen\measuredangle APB = n.CP.sen\measuredangle APC$, donde m y n son constantes. Determinar el lugar geométrico del punto P.

Solución de Floro Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

Sea P un punto del plano ($P \neq A$) y consideramos el segmento AP.

De la expresión dada, $m.BP.sen\measuredangle APB = n.CP.sen\measuredangle APC \rightarrow \frac{1}{2}.AP.m.BP.sen\measuredangle APB = \frac{1}{2}.AP.n.CP.sen\measuredangle APC$

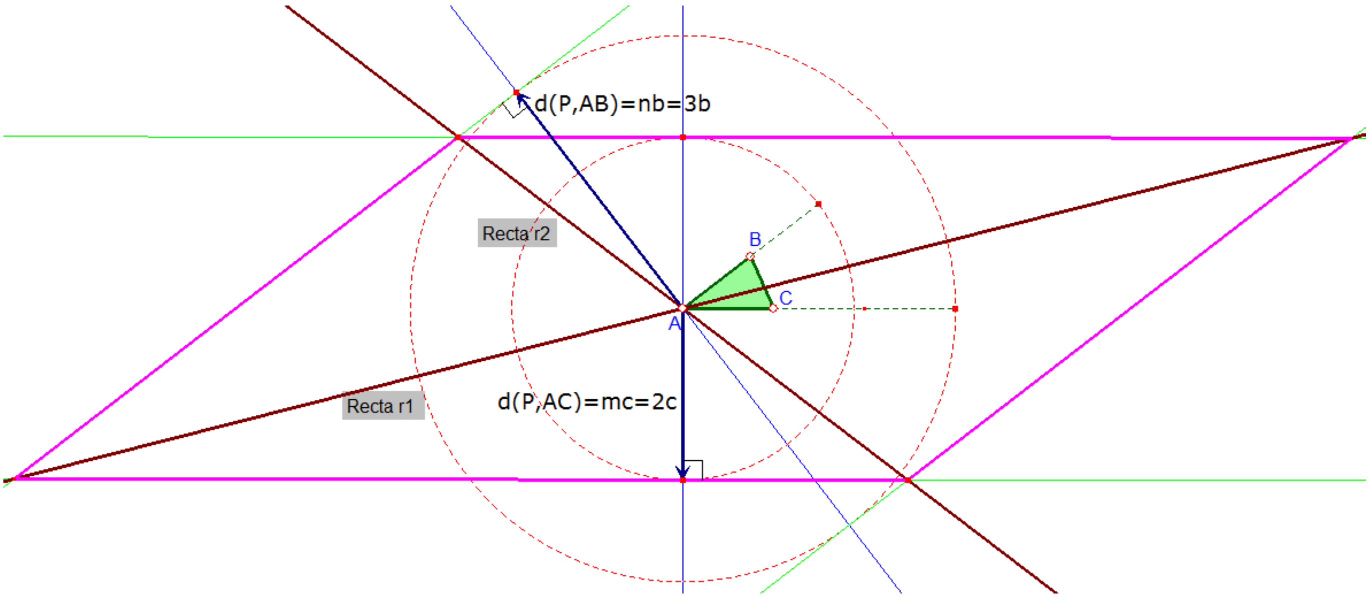
$$m.(\frac{1}{2}.AP.BP.sen\measuredangle APB) = n.(\frac{1}{2}.AP.CP.sen\measuredangle APC) \rightarrow m.Area(\overset{\Delta}{APB}) = n.Area(\overset{\Delta}{APC})$$

En definitiva, $\dfrac{Area(\overset{\Delta}{APB})}{Area(\overset{\Delta}{APC})} = \dfrac{n}{m}$.

Es decir, $\dfrac{Area(\overset{\Delta}{APB})}{Area(\overset{\Delta}{APC})} = \dfrac{c.h_c}{b.h_b} = \dfrac{n}{m} \rightarrow \dfrac{h_c}{h_b} = \dfrac{n.b}{m.c}$.

Esta última condición equivale a decir que un punto P del plano distinto de A pertenecerá a nuestro L.G. si y solo si $\dfrac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \dfrac{h_c}{h_b} = \dfrac{n.b}{m.c}$.

Ahora bien, esta última condición algebraica es fácil de construir geométricamente. Los puntos que la verifican están situados en un par de rectas que, pasando por el punto A, cumplen la condición exigida.
Podemos visualizar dicha construcción para un caso concreto. Sean los valores m=2 y n=3.



Como podemos observar, el L.G. reside en las rectas que pasan por las dos diagonales de cualquier paralelogramo centrado en el punto A y de lados paralelos a los lados AB=c y AC=b, respectivamente y cuyos lados distan del centro A unos valores que en proporción coincide con $\dfrac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \dfrac{n.b}{m.c}$.