Problema 223

Demostrar que si los lados de un cuadrilátero son las raíces de la ecuación

$$x^4-4x^3+6qx^2+(8-12q)x+s=0$$

entonces el cuadrilátero tiene un círculo inscrito.

Solución

Es sabido que la condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero admita círculo inscrito es que los pares de lados opuesto sumen lo mismo.

Vamos a caracterizar los polinomios mónicos de grado cuatro para que los dos pares de raíces sumen lo mismo.

Sea el polinomio

$$x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

y sean sus raíces $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Por las fórmulas de Cardano-Vieta tenemos

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma+\delta&=-a_3\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\delta\gamma&=a_2\\ \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta&=-a_1\\ \alpha\beta\gamma\delta&=a_0\end{aligned}$$

Imponiendo la condición $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ (pondremos $\alpha+\beta=\gamma+\delta=m$) y operando, queda

$$\begin{aligned}2m&=-a_3\\ \alpha\beta+\delta\gamma+m^2&=a_2\\ (\alpha\beta+\gamma\delta)m&=-a_1\\ \alpha\beta\gamma\delta&=a_0\end{aligned}$$

Eliminado $\alpha\beta+\gamma\delta$ y m de las tres primeras, resulta

$$a_2-\frac{a_3^2}{4}=\frac{2a_1}{a_3} \quad (1)$$

que es la condición para que dos pares de raíces sumen lo mismo.

Sólo queda verificar que los coeficientes de nuestra ecuación $(a_3=-4,\ a_2=6q,\ a_1=8-12q)$ cumplen (1):

$$a_2-\frac{a_3^2}{4}=6q-\frac{16}{4}=6q-4$$

$$\frac{2a_1}{a_3}=\frac{-24q+16}{-4}=6q-4$$

Cristóbal Sánchez-Rubio Benicasim