Problemas propuestos 226-230

Problema 226 (propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumania)
Se considera la sucesión

$$\begin{aligned} (x_n)_{n\geq 0} \text{ tal que } x_n &= 73x_n - 256x_{n-1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \\ \text{con } x_0 &= 4a+3,\ x_1 = 256a+27;\ a \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En lo que sigue se considerará el resto de la división de x_n por 11, para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Determinar los valores del parámetro a para los que (x_n) es convergente, y en tales casos calcular su límite.

b) Si $a-1$ es múltiplo de 11, determinar la sucesión (x_n).

Problema 227 (propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumania)
En el plano del cuadrado ABCD, M es un punto cualquiera. Encontrar el conjunto de valores de la expresión

$$R(M) = \frac{MA+MC}{MB+MD}.$$

Problema 228 (propuesto por Roberto Bosch Cabrera, Florida, Estados Unidos)

Se divide un cuadrado en n^2 cuadrados más pequeños, iguales entre si, *mediante paralelas a los lados del inicial (la cursiva es del editor).*Se trazan algunas diagonales de los cuadrados pequeños, de modo tal que no haya dos diagonales con un punto común. Sea $D(n)$ el número máximo de diagonales que es posible trazar en esas condicones. Probar que:

$$\begin{aligned} a)D(1) &= 1, D(2)=3, D(3)=6, D(4)=10, D(5)=16 \\ b) \text{ Si } n \text{ es impar, entonces } D(n) &\leq \frac{(n+1)^2}{2} - 2 \\ c) \text{ Si } n \text{ es par, entonces } D(n) &= \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{2} \right\rfloor - 1 \\ &*d) \text{ Encontrar } \textit{una expresión para } D(n) \end{aligned}$$

(Nota del editor: como es habitual, se marca con * un apartado propuesto sin solución)

Problema 229 (propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumania)
Sea ABC un triángulo y AA_1, BB_1, CC_1 tres cevianas concurrentes en un punto O interior al triángulo.

Sean

$$
\begin{aligned}
\alpha &= [AOC_1] - [COA_1]\,, \\
\beta &= [BOA_1] - [AOB_1]\,, \\
\gamma &= [COB_1] - [BOC_1]\,.
\end{aligned}
$$

Probar que si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, entonces $\alpha\beta\gamma = 0$.
Nota: $[PQR]$ es el área del triángulo PQR.

Problema 230 (Propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumania)
Demostrar que se verifica la siguiente desigualdad triangular:

$$
\max\left\{\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right),\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right),\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\right\} \geq 4
$$