Problema 224

3 de noviembre de 2012

Problem No. 224. *Si n es un entero impar, y $a, b, c, \cdots$ son las $n-1$ raíces $n-$ésimas complejas de la unidad, probar que:*

$$(a^r-1)(b^r-1)(c^r-1)\cdots = n$$

$$(a^r+1)(b^r+1)(c^r+1)\cdots = 1$$

si r es cualquier nÃºmero primo con n.

Demostración. (Devis M. Alvarado, University of Puerto Rico Mayaguez)
(I) Consideremos el polinomio: $P(z)=\sum_{i=0}^{n-1} z^i$ con n impar, y sean ω_i las $n-1$ raíces complejas. Si ω es una de estas raíces, se tiene que $\{\omega_i\}_{i=1}^{n-1}=\{\omega^i\}_{i=0}^{n-1}$. Tambien como n y r son primos relativos, y sean $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$ tal que $ir \equiv r_i mod(n)$ entonces $\{r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}\}$ es una permutación de $\{1,2,3,\cdots,n-1\}$

$$P(z)=\prod_{i=1}^{n-1}(z-\omega_i)=\prod_{i=1}^{n-1}(z-\omega^i)=\prod_{i=1}^{n-1}(z-\omega^{r_i})=\prod_{i=1}^{n-1}(z-\omega^{ir-kn})=\prod_{i=1}^{n-1}(z-\omega^{ir})$$

esta última igualdad por que $\omega^n=1$.

$$\prod_{i=1}^{n-1}(z-\omega^{ir})=\prod_{i=1}^{n-1}(z-\omega_i^r)=\prod_{i=1}^{n-1}(-1)\prod_{i=1}^{n-1}(\omega_i^r-z)=\prod_{i=1}^{n-1}(\omega_i^r-z)$$

Evaluando $P(z)$ en $z=1$ se obtiene

$$\prod_{i=1}^{n-1}(\omega_i^r-1)=\sum_{i=0}^{n-1}(1)=n$$

(II) Evaluando $P(z)$ en $z=-1$ se obtiene

$$\prod_{i=1}^{n-1}(\omega_i^r+1)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i=\frac{1-(-1)^n}{2}=1$$

que era lo que se quería. □