Título: Los vectores una de las vías fundamentales para el vínculo interconceptual entre las disciplinas Álgebra y Geometría en problemas de olimpiadas.

Autores:

MSc. Eduardo Miguel Pérez Almarales. Profesor Auxiliar.

Dr. C. Guillermo Calixto González Labrada. Profesor Titular.

Dr. C. Marta Álvarez Pérez. Profesor Titular.

Resumen:
El trabajo con vectores es una vía eficaz para resolver problemas geométricos en olimpiadas de Matemática. En muchas ocasiones los estudiantes que no tienen un gran desarrollo en la geometría sintética recurren a este método para resolver los problemas de geometría que aparecen en las olimpiadas estableciendo relaciones conceptuales con el Algebra.
Palabras claves: Vectores, relaciones conceptuales, Algebra, Geometría.
Summary:
The work with vectors is an effective road to solve geometric problems in olympiads of Mathematics. In many occasions the students that don't have a great development in the synthetic geometry appeal to this method to solve the geometry problems that they appear in the olympiads establishing conceptual relationships with the Algebra.
Key words: Vectors, conceptual relationships, Algebra, Geometry.

Introducción:

Según aborda Macedo (2001) dentro de los métodos que, como tendencias, más han impactado a América Latina y el Caribe en las últimas décadas se encuentra el aprendizaje por cambios conceptuales que tiene como rasgos distintivos la sustitución de ideas previas de sentido común por otras más cercanas a las ideas científicas, producir insatisfacción con lo que se sabe, los estudiantes tienen conceptos, sean útiles o no, deben evolucionar. Del mismo modo se deben establecer relaciones, a partir de la construcción de significados, favoreciendo que los estudiantes sean protagonistas de su aprendizaje, facilitando la construcción del conocimiento. Estos aspectos se potencian con la sistematización de conocimientos interconceptuales.

La gestión de conocimientos dentro de los grupos de preparación de estudiantes talentosos en Matemática es una vía eficaz para lograr conocimientos sólidos, a partir de la base teórica creada, por la utilización de relaciones de integración de los conceptos matemáticos básicos, que se expresan a partir de relaciones interconceptuales disciplinares (aquellos en el interior de alguna de las disciplinas matemáticas) y las interdisciplinares (entre los diferentes dominios cognitivos de la Matemática).

La combinación interconceptual de conocimientos se define por G. González (2012) como la intencionalidad de interrelacionar conceptos según la lógica histórica de su formación, el carácter inexacto de las definiciones y la necesidad de estructurar un pensamiento matemático dialéctico portador de apropiaciones culturales que garantizan esencialidades del proceso. En el proceso de preparación de estudiantes talentosos para olimpiadas de Matemática se van estableciendo interconexiones culturales que le permiten a partir de la sistematización interconceptual concatenar los conceptos que necesita y aplicarlos en disímiles situaciones durante la resolución de problemas.

El modo de realizar la sistematización del conocimiento matemático con base interconceptual en estudiantes talentosos es muy limitado; el profesor preparador, en la mayoría de los casos aborda los elementos teóricos que desde su punto de vista deben conocer, sin tener en cuenta en muchas ocasiones un orden lógico, ni la imprescindible sistematización y consolidación de los conocimientos. Se pudo determinar además que desde lo teórico la mayor parte de los libros que se utilizan en la preparación se basan de modo general en colecciones de problemas o contenidos específicos, carentes de las conexiones propias de la Matemática.

La preparación de los estudiantes se basa en memorizar un gran cúmulo de contenidos, sin tener en cuenta las interrelaciones y los conocimientos indispensables que necesitan a partir de las características individuales de cada uno de los estudiantes talentosos y de los contenidos que se tratan. Ni el profesor ni los estudiantes realizan el análisis de todos los conceptos fundamentales que se trabajan en cada una de las disciplinas de la enseñanza de la Matemática, objetos de estudio para olimpiadas de conocimientos (Álgebra, Teoría de Números, Geometría y Matemática Discreta), hacia su interior y aquellos útiles para interconectar disciplinas.

Este aspecto es de vital importancia en la preparación de los estudiantes porque permite no memorizar tantos conceptos y realizar el trabajo sobre la base de analizar las relaciones y características más importantes de los conceptos fundamentales, saber determinar cuáles son las características distintivas de las definiciones de los conceptos subordinados, las comunes a objetos de un mismo tipo y las interconexiones conceptuales existentes.

Del mismo modo los estudiantes tienen la posibilidad de trabajar con los contenidos en los cuales tiene mayor desarrollo, por ejemplo en la dinámica de la preparación existen estudiantes que presentan dificultades en disciplinas como la Geometría que pueden a partir de las interconexiones con el Álgebra resolver los problemas geométricos que se les proponen, tanto en la preparación como en los eventos competitivos, al utilizar contenidos como los de Geometría Analítica, Trigonometría, conjugación anarmónica y armónica, trabajo con vectores o números complejos.

Desarrollo:

En el presente artículo se pretende mostrar la forma de utilizar el trabajo con vectores en la solución de problemas geométricos de olimpiadas de Matemática.

Dentro de los elementos teóricos necesarios se tienen:

Se denomina segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ a un par ordenado (A; B) donde el punto A se llama origen y el punto B extremo.

El segmento dirigido $\overrightarrow{BA}$ es el contrario de $\overrightarrow{AB}$ y se denota por $-\overrightarrow{AB}$

Si los puntos A y B son distintos $\overrightarrow{AB}$ es no nulo y si A = B, entonces el segmento dirigido es nulo.

Se dice que $\overrightarrow{AB}$ es paralelo con una recta l si $\overrightarrow{AB}$ es nulo o la recta que contiene a A y a B es paralela a la recta l. Por su parte $\overrightarrow{AB} \perp$ l si la recta que pasa por A y B es perpendicular a la recta l.

Los segmentos dirigidos $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, …, $\overrightarrow{A_nB_n}$ se denominan colineales si existe una recta l tal que cada uno de ellos es paralelo a la recta l.

Si se desea adicionar segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, es suficiente con trasladar el segmento dirigido $\overrightarrow{CD}$ de modo que el origen de $\overrightarrow{CD}$ coincida con el extremo de $\overrightarrow{AB}$, entonces el segmento dirigido suma sería el que tiene como origen a A y como extremo a D. La adición de segmentos dirigidos es asociativa y conmutativa.
Si tenemos un conjunto finito de puntos A_1, A_2, …, A_n una línea poligonal con vértices consecutivos en esos puntos se llama camino que lleva de A_1 a A_n. Para todo camino se cumple que: $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$, del mismo modo una línea poligonal cerrada se denomina ciclo y se cumple que: $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\vec{0}$ es decir la suma de las componentes de un ciclo da como resultado el segmento dirigido nulo.
Dos segmentos dirigidos son iguales si tienen la misma longitud, la misma dirección y el mismo sentido.
Se denomina vector en el plano al conjunto de todos los segmentos dirigidos iguales entre si, cuyos origenes y extremos pertenecen al plano. Suelen denotarse por letras minúsculas $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots$.
Si los puntos A y B y el vector $\vec{a}$ son tales que cumplen que $\overrightarrow{AB}\in\vec{a}$, entonces $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. En este caso se dice que el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ es un representante del vector $\vec{a}$. Los vectores cumplen las mismas propiedades de sus representantes.
Se llama ángulo entre dos vectores no nulos $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ y $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$ al ángulo entre los rayos AB y CD. El ángulo entre vectores con la misma dirección y sentido es 0º, el ángulo entre vectores con la misma dirección y sentidos contrarios es 180º. Si el ángulo que forman es 90º se dice que son ortogonales.
El producto escalar de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se denota por ($\vec{a}$, $\vec{b}$) y se calcula como: $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ si uno de los vectores es el nulo el producto escalar es cero.
Si se toma como origen del sistema de vectores al circuncentro del triángulo ABC, entonces el ortocentro H cumple que $\vec{H}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$, donde la notación con una sola letra denota el vector de posición de los puntos representados por esas rectas. Esta relación es conocida como teorema de Silvestre. El vector de posición es el que tiene como origen el origen del sistema de vectores que se tome y como extremo ese punto.
Esta fórmula se deduce tomando como origen del sistema de vectores al centro de la circunferencia circunscrita, entonces los vértices de cada triángulo serán los vectores de posición de esos puntos y las coordenadas del ortocentro sería la suma de los vectores de posición de los vértices. El vector suma de $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, pasa por el punto medio de $\overline{AB}$ y tiene una longitud de dos veces la distancia desde O al punto medio de $\overline{AB}$, como se conoce que la distancia del ortocentro al vértice es el doble de la distancia del circuncentro al punto medio, entonces el vector desde el circuncentro al ortocentro es la suma de los tres vectores de posición de los vértices del triángulo.

En este caso que analizamos el baricentro G cumple que $\vec{G}=\frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3}$.

En todo vector $\overrightarrow{AB}$ se cumple que $\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}$

El punto medio M de un segmento $\overline{AB}$ cumple que $\vec{M}=\frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$

En un sistema de coordenadas los vectores que se encuentran a una unidad del centro del sistema y sobre los ejes coordenados se denominan vectores unitarios. Los vectores unitarios se denotan por e_1 y e_2.
Cualquier vector de posición del plano correspondiente al punto P(a; b) se puede expresar como $\vec{P}=ae_1+be_2$, siempre y cuando e_1 y e_2 sean ortogonales.

Si un punto M divide a un segmento $\overline{AB}$ en una razón λ, es decir $\frac{AM}{MB}=\lambda$, entonces se cumple que $\vec{M}=\frac{\vec{A}+\lambda\vec{B}}{\lambda+1}=\frac{1}{\lambda+1}\vec{A}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{B}=(1-\lambda)\vec{A}+\lambda\vec{B}$

A continuación se proponen algunos problemas como ejemplo de la utilización de los vectores en la resolución de problemas geométricos de olimpiadas en los cuales se utilizan los elementos teóricos abordados.
Problema 1. (Hungría, 1997) Sean R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, G su baricentro, H su ortocentro y F el punto medio de GH. Prueba que $\overline{AF}^2+\overline{BF}^2+\overline{CF}^2=3R^2$.
Solución:
Tomemos a O como origen de un sistema de vectores, entonces $\vec{H}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$, $\vec{G}=\frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3}$ y $\vec{F}=\frac{2(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})}{3}$, entonces: $\overrightarrow{AF}^2+\overrightarrow{BF}^2+\overrightarrow{CF}^2=(\vec{A}-\vec{F})(\vec{A}-\vec{F})+(\vec{B}-\vec{F})(\vec{B}-\vec{F})+(\vec{C}-\vec{F})(\vec{C}-\vec{F})=\vec{A}^2+\vec{B}^2+\vec{C}^2-2(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})\cdot\vec{F}+3\vec{F}^2=3R^2-\vec{F}\cdot[2(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})-3\vec{F}]=3R^2$
Problema 2. (Rumanía, 1997) Sea ABCDEF un hexágono convexo, sean P, Q, R los puntos de intersección de AB y EF; EF y CD; CD y AB, respectivamente y sean S, T, U los puntos de intersección de BC y DE; DE y FA; FA y BC, respectivamente. Prueba que $\frac{AB}{PR}=\frac{CD}{RQ}=\frac{EF}{QP}\Leftrightarrow\frac{BC}{US}=\frac{DE}{ST}=\frac{FA}{TU}$

Solución:
La premisa $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{PR},\ \overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{RQ},\ \overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{QP}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\lambda(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{QP})=\vec{0}$, como se cumple además que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$, es equivalente a $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$, como U,B,C,S están alineados, entonces $\overrightarrow{BC}=\lambda_1\overrightarrow{US}$, de manera análoga $\overrightarrow{DE}=\lambda_2\overrightarrow{ST}$ y $\overrightarrow{FA}=\lambda_3\overrightarrow{TU}$, entonces $\lambda_1\overrightarrow{US}+\lambda_2\overrightarrow{ST}+\lambda_3\overrightarrow{TU}=\vec{0}$, entonces como $\overrightarrow{US}+\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TU}=\vec{0}\Rightarrow-\overrightarrow{TU}=\overrightarrow{US}+\overrightarrow{ST}$, sustituyendo se tiene $\lambda_1\overrightarrow{US}+\lambda_2\overrightarrow{ST}=\lambda_3(\overrightarrow{US}+\overrightarrow{ST})=\lambda_3\overrightarrow{US}+\lambda_3\overrightarrow{ST}$, entonces se cumple que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, esto es equivalente a la tesis $\frac{BC}{US}=\frac{DE}{ST}=\frac{FA}{TU}$.
Otra forma de demostrar lo pedido es demostrando que ambas expresiones son equivalentes a $\vec{B}-\vec{A}+\vec{D}-\vec{C}+\vec{F}-\vec{E}$, como pudo apreciarse el miembro izquierdo es equivalente con $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{B}-\vec{A}+\vec{D}-\vec{C}+\vec{F}-\vec{E}=\vec{0}$,

por su parte el miembro derecho es equivalente con $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AF}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{B}-\vec{C}+\vec{D}-\vec{E}+\vec{F}-\vec{A}=\vec{0}$, que es equivalente al caso anterior.

Problema 3. (San Petesburgo, 1997) Sean K, L, M, N los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente de un cuadrilátero cíclico ABCD. Prueba que los ortocentros de los triángulos AKN, BKL, CLM, DMN son los vértices de un paralelogramo.

Solución:

Tomando vectores de origen en el centro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero $ABCD$, entonces el ortocentro de ABD es $\vec{A}+\vec{B}+\vec{D}$; pero como AKN es una homotecia de ABD con centro en A y razón $\frac{1}{2}$, se tiene que el ortocentro de AKN es $\vec{A}+\frac{\vec{B}+\vec{D}}{2}$, de igual modo el ortocentro de CLM es $\vec{C}+\frac{\vec{B}+\vec{D}}{2}$ y su punto medio es $\frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D})$, de igual modo se prueba con los dos restantes. Por tanto como los puntos medios coinciden el cuadrilátero es un paralelogramo.

Problema 4. (Rumanía, 2002) Sea $ABCD$ un cuadrado unitario y M, N puntos interiores a los lados AB y BC respectivamente, tal que: $\frac{AM}{MB}=7$ y $\frac{CN}{NB}=2$, sea P el punto de intersección de las rectas CM y DN.

a) Demuestra que $13\overrightarrow{AP}=12\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AD}$
b) Calcula la longitud de AP.

Solución:

Usaremos coordenadas, tomemos como origen de un sistema de coordenadas rectangular en $A(0,0)$, tal que tenemos $B(1,0)$, $C(1,1)$, $M\left(\frac{7}{8},0\right)$, $N\left(1,\frac{1}{3}\right)$. Las rectas DN y CM tienen respectivamente ecuaciones $8x-y=7$ y $2x+3y=3$, resolviendo el sistema tenemos las coordenadas de $P\left(\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$ como $\overrightarrow{AB}=e_1$, $\overrightarrow{AD}=e_2$ son vectores unitarios ortogonales del sistema de coordenadas seleccionado, tenemos: $\overrightarrow{AP}=\frac{12}{13}e_1+\frac{5}{13}e_2=\frac{12}{13}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{13}\overrightarrow{AD}$, se sigue por cálculo estándar que $AP=\sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2}=1$

Problema 5. (Rumanía, 2002) Sea ABCD un rombo y M, N, P puntos interiores a los lados AB, BC, CD, respectivamente. Demuestra que el baricentro del triángulo MNP pertenece a la recta AC si y solo si $AM+DP=BN$.

Solución:

Sea O el punto de intersección de las diagonales del rombo dado, usaremos vectores poniendo $\frac{AM}{AB}=m, \frac{BN}{BC}=n, \frac{DP}{DC}=p$, como $AB=BC=CD$, la condición $AM+DP=BN$ es equivalente a $m+p=n$.

Considere los vectores
$\overrightarrow{OM}=(1-m)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{ON}=(1-n)\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OP}=(1-p)\overrightarrow{OD}+p\overrightarrow{OC}$.

Sea G el baricentro del triángulo MNP, como $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$ y $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$, obtenemos que

$3\overrightarrow{OG} = (m+n+p-1)\overrightarrow{OC} + (m-n+p)\overrightarrow{OB}$, entonces el punto G pertenece a la recta AC si y solo si los vectores $\overrightarrow{OG}$ y $\overrightarrow{OC}$ son colineales, que es si y solo si $m-n+p=0$.

Problema 6. (Rumanía, 2002) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y M un punto en su circunferencia circunscrita. Sean H_1, H_2, H_3, H_4 los ortocentros de los triángulos MAB, MBC, MCD, MDA, respectivamente. Prueba que:

a) $H_1\, H_2\, H_3\, H_4$ es un paralelogramo.

b) $H_1\, H_3 = 2EF$

Solución:

Usaremos Álgebra de vectores. El circuncentro de todos los triángulos MAB, MBC, MCD, MDA es O, que lo tomamos como origen del sistema de vectores, por tanto por la fórmula de Silvestre tenemos:

$\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$.

Calculando $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{H_4H_3}$

b) Usando también vectores:

$\overrightarrow{H_1H_3} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$, por tanto $H_1\, H_3 = 2EF$

Problema 7. (Rumanía, 2002) Sea ABC un triángulo, G su baricentro y M, N, P puntos en los lados AB, BC, CA, respectivamente tal que $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$, denote por G_1, G_2, G_3 los baricentros de los triángulos AMP, BMN, CNP, respectivamente, prueba que:

a) Los triángulos ABC y $G_1G_2G_3$ tienen el mismo baricentro.

b) Para todo punto D en el plano ABC se cumple que $3DG < DG_1 + DG_2 + DG_3 < DA + DB + DC$.

Solución:

Sea $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = \lambda$, entonces $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{GA} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{GB} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{GP} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{GC} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{GA}$

Por lo tanto $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GA}\right) = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

, esto puesto que G es el baricentro del triángulo $G_1G_2G_3$.

b) La primera desigualdad se tiene de $3\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DG_1} + \overrightarrow{DG_2} + \overrightarrow{DG_3}$, lo cual es una consecuencia del resultado anterior. Entonces aplicando la longitud de vectores y el hecho obvio que DG_1, DG_2, DG_3 no son colineales.

La segunda desigualdad sale de $\left|\overrightarrow{DG_1}\right| = \left|\frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{\lambda}{3(\lambda+1)}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3(\lambda+1)}\overrightarrow{DC}\right| < \frac{2}{3}DA + \frac{\lambda}{3(\lambda+1)}DB + \frac{1}{3(\lambda+1)}DC$ y dos desigualdades semejantes que después son adicionadas.

Problema 8. (Rumanía, 2002) Sea ABC un triángulo rectángulo con $\measuredangle BAC = 90^\circ$ y sea $M \in AB$, tal que $\frac{AM}{MB} = 3\sqrt{3} - 4$. Es conocido que el punto

simétrico de M con respecto a la recta GI está en AC. Determina la amplitud del $\measuredangle ABC$ (G es el baricentro del triángulo ABC e I es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo).
Solución:
Usaremos vectores. Sea N el punto simétrico de M con respecto al punto medio de GI. Consideremos α y β tal que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = (2-2\alpha-\beta)\overrightarrow{GA} + (\beta-\alpha)\overrightarrow{GC}$, por otra parte $\overrightarrow{GI} = \frac{(a-b)\overrightarrow{GA}+(c-b)\overrightarrow{GC}}{a+b+c}$, por igualdad de coeficientes tenemos $\alpha = \frac{1}{3} + \frac{b}{a+b+c} = \frac{1}{3} + \frac{3-\sqrt{3}}{6}$. Denote $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{a}$, obtenemos
$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \frac{x}{1+x+y} = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \end{cases}$, resolviendo para x tenemos $x = \frac{1}{2}$, implicando por tanto
$\measuredangle ABC = 30^\circ$

Problema 9. (Eslovenia, 2008) Sean A, B, C, D y E, puntos consecutivos en una circunferencia con centro en O, tal que $|AC| = |BD| = |CE| = |DO|$. Sean H_1, H_2, H_3 los ortocentros de los triángulos ACD, BCD y BCE. Prueba que el triángulo $H_1H_2H_3$ es rectángulo.
Solución
Tomemos el circuncentro O del triángulo como centro del sistema de vectores. Como H_1 es el ortocentro del triángulo ACD tenemos que $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$, similarmente $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$, luego $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{H_2H_3} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}$, el producto escalar de estos dos vectores es:
$\overrightarrow{H_1H_2} \cdot \overrightarrow{H_2H_3} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = |OB||OE| \cos \measuredangle BOE - |OB||OD| \cos \measuredangle BOD - |OA||OE| \cos \measuredangle AOE + |OA||OD| \cos \measuredangle AOD = |OA|^2(\cos \measuredangle BOE - \cos \measuredangle BOD - \cos \measuredangle AOE + \cos \measuredangle AOD)$
, aquí usamos el hecho de que O es el centro de la circunferencia que contiene a A, B, C, D y E. Los triángulos AOC y COE son equiláteros, luego $\measuredangle AOE = 120^\circ$, el triángulo BOD es también equilátero, luego $\measuredangle BOD = 60^\circ$, entonces:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H_1H_2} \cdot \overrightarrow{H_2H_3} &= |OA|^2(\cos \measuredangle BOE - \cos 60^\circ - \cos 120^\circ + \cos \measuredangle AOD) \\ &= |OA|^2(\cos \measuredangle BOE + \cos \measuredangle AOD) \\ &= |OA|^2 \cos\left(\frac{\measuredangle BOE + \measuredangle AOD}{2}\right) \cos\left(\frac{\measuredangle BOE - \measuredangle AOD}{2}\right) \end{aligned}$$

Verificándose que $\measuredangle BOE + \measuredangle AOD = 2\measuredangle BOE + \measuredangle DOE + \measuredangle AOB$ lo que implica que
$\frac{\measuredangle BOE + \measuredangle AOD}{2} = \measuredangle BOD + \frac{\measuredangle DOE + \measuredangle AOB}{2} = 60^\circ + \measuredangle DCE + \measuredangle ACB = 60^\circ + \measuredangle DCB - \measuredangle ECA = 60^\circ + (180^\circ - 30^\circ) - 120^\circ = 90^\circ$
, luego $\cos\left(\frac{\measuredangle BOE + \measuredangle AOD}{2}\right) = 0$ y $\overrightarrow{H_1H_2} \cdot \overrightarrow{H_2H_3} = 0$, por lo tanto el triángulo $H_1H_2H_3$ es rectángulo.

Problema 10. (Rumanía, 2009). En los lados AB y AC del triángulo ABC considera a los puntos D y E respectivamente, tal que $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$.

Sea T el punto de intersección de las rectas DC y BE. Determina el número real α tal que $\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\alpha\overrightarrow{TA}$.
Solución:
Recuerde que los vectores $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$ y $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}$ tienen la dirección de los vectores no colimneales $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, luego su suma es $\vec{0}$ ssi ambos son $\vec{0}$.
Deducimos que D y E son los puntos medios de los segmentos AB y AC, respectivamente, por tanto T es el baricentro del triángulo ABC. De $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$ obtenemos que $\alpha=-1$.
En algunos problemas de primera vista es bastante difícil pensar en la utilización de los vectores un ejemplo lo tenemos en el siguiente problema propuesto en Sudáfrica en el 2009.
Problema 11. Demuestra que para cualquier coloración del plano usando dos colores se puede encontrar un triángulo con los tres vértices y el baricentro del mismo color.
Solución:
Pintemos el plano de rojo y verde, es obvio que podemos encontrar un triángulo con todos los vértices del mismo color, supongamos que ellos son todos rojos. Sean los vectores de posición de los vértices de este triángulo son $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Su baricentro es $\vec{G}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$, si es rojo acabamos, supongamos que es verde. Ahora tomamos nuestros tres puntos rojos y tomemos a $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como vértices y $\vec{a}$ como baricentro. Si el otro vértice que se obtiene al formar el triángulo es rojo se acaba el problema, luego lo tomamos verde. Este punto es $\vec{A}=3\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, similarmente podemos demostrar que los puntos $\vec{B}=3\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}$ y $\vec{C}=3\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$ tienen que ser verdes, pero entonces el baricentro del triángulo con vectores de posición $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ tiene como baricentro a $\vec{G}$ que es verde.

Bibliografía:

Andreescu, T. (1998). Mathematical Contests 1997-1998. Olimpiad Problems and solution from around the worl. USA: American Mathematics Competitions.
Colectivo de autores (2002). Olimpiada Nacional de Rumanía.
Colectivo de autores (2009). Olimpiada Nacional de Rumanía.
Colectivo de autores (2008). Olimpiada Nacional de Eslovenia.
Colectivo de autores (2009). Olimpiada Nacional de Sudáfrica.
Davidson San Juan, L., Reguer Villar, R., & Frontela, R. (1987). Problemas de Matemática Elemental 1. La Habana: Pueblo y Educación.
Davidson San Juan, L., Reguer Villar, R., & Frontela, R. (1995). Problemas de Matemática Elemental 2. La Habana: Pueblo y Educación.
Davidson San Juan, & Recio, F. (1974). Los Concursos de Matemática. Primera parte. La Habana: Dirección de producción de medios de enseñanza. MINED.
Davidson San Juan, & Recio, F. (1975). Los Concursos de Matemática. Segunda parte. La Habana: Dirección de producción de medios de enseñanza. MINED.
Díaz González, M. (2004). Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Preuniversitaria I. La Habana: Pueblo y Educación.
Díaz González, M. (2007). Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Preuniversitaria II. La Habana: Pueblo y Educación.

Díaz González, M. (2011). Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Secundaria Básica III. La Habana: Pueblo y Educación.
González Labrada, G. C. (2012). Didáctica combinativa de base interconceptual: Matemática de la Educación primaria. Manzanillo: UCP Blas Roca
Lehmann, Ch. (1989). Geometría Analítica. Limusa.
Macedo, B. (2001). La enseñanza de las ciencias en América Latina y el Caribe. Conferencia central del simposio 4 sobre Didáctica de las Ciencias en el nuevo milenio. Ciudad de La Habana: Evento Pedagogía ‘2001. MINED.
Ortega, M. (1910). Geometría. Tomo I. Parte elemental. Madrid: Perlado, Páez & Cia.
Ortega, M. (1910). Geometría. Tomo II. Complementos y ejercicios. Madrid: Perlado, Páez y Cia.
Pogorélov, A. V. (1974). Geometría elemental. Moscú: Mir.
Shariguin, H. (1989). Problemas de Geometría. Moscú: Mir.