LA DESIGUALDAD DE EULER
A PARTIR DE OTRAS DESIGUALDADES ENTRE ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO.

De la identidad $\overline{OI}^2 = R(R-2r)$ en la que I y O designan, respectivamente, el incentro y el circuncentro de un triángulo, R el radio de su circunferencia circunscrita y r el de su circunferencia inscrita, atribuída a Euler (1765) toda vez que fue obtenida por W. Chapple (1746), se deduce inmediatamente la muy conocida *desigualdad de Euler*

$$R \geq 2r$$

verificándose la igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

Esta ubícua desigualdad conserva su carácter emblemático en el campo de las desigualdades geométricas porque es simple pero no por ello trivial. Indica su prevalencia el hecho de que es equivalente a una larga lista de desigualdades entre elementos de un triángulo, entre otras, las siguientes (aquí y en todo lo que sigue las notaciones son las habituales para un triángulo ABC):

$$\frac{a}{-a+b+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2}$$

$$\frac{1}{\sin A \sin B}+\frac{1}{\sin B \sin C}+\frac{1}{\sin C \sin A} \geq 4$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$$

$$\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2} \leq \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c} \geq \frac{9}{s}$$

$$\frac{a^2}{r_b r_c}+\frac{b^2}{r_c r_a}+\frac{c^2}{r_a r_b} \geq 4$$

$$r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b \geq h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b$$

$$\frac{1}{h_a-2r}+\frac{1}{h_b-2r}+\frac{1}{h_c-2r} \geq \frac{3}{r}$$

donde r_a, r_b, r_c y h_a, h_b, h_c son los respectivos radios de las circunferencias excritas y las alturas de ΔABC.

El propósito de este artículo es establecer determinadas desigualdades geométricas y deducir de ellas la desigualdad de Euler.

1. $\frac{R}{r} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$

Sustituimos R y r en función de las longitudes de los lados del triángulo y obtenemos equivalentemente:

$$\frac{\dfrac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}}{\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$$

o sea,

$$\frac{abc}{4(s-a)(s-b)(s-c)} \geq \frac{b^2+c^2}{bc}$$

es decir,

$$ab^2c^2 \geq 4\left(b^2+c^2\right)(s-a)(s-b)(s-c).$$

Si ponemos $x = s-a \geq 0$, $y = s-b \geq 0$ i $z = s-c \geq 0$, (geométricamente, éstos son los segmentos en que los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita dividen los lados del triángulo) esta última desigualdad se convierte en

$$\begin{aligned}
& (y+z)(x+z)^2(x+y)^2 \geq 4\left[(x+z)^2+(x+y)^2\right]xyz \\
\Leftrightarrow\quad & (y+z)(x+z)^2(x+y)^2 - 4\left[(x+z)^2+(x+y)^2\right]xyz \geq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & y(x+z)^2(x+y)^2 + z(x+z)^2(x+y)^2 - 4xyz(x+z)^2 - 4xyz(x+y)^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & y(x+y)^2\left[(x+z)^2-4xz\right] + z(x+z)^2\left[(x+y)^2-4xy\right] \geq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & y(x+y)^2(x-z)^2 + z(x+z)^2(x-y)^2 \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Se verifica la igualdad si y sólo si $x-z=0$ y $x-y=0$, si y sólo si $x=y=z$, si y sólo si $a=b=c$, si y sólo si el triángulo es equilátero.

Para obtener la desigualdad de Euler sólo resta aplicar un resultado elemental: si a y b son números reales positivos, entonces $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, verificándose la igualdad si y sólo si $a=b$. Esto es inmediato, pero constituye un teorema fundamental para las desigualdades.

2. $\dfrac{R}{2r} \geq \dfrac{m_a}{h_a}$ (m_a es la longitud de la mediana relativa al lado a)

Tenemos en cuenta que $m_a{}^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$ y sucesivamente obtenemos:

$$\frac{R}{2r} \geq \frac{m_a}{h_a} \Leftrightarrow \frac{R}{2r} \geq \frac{m_a}{\frac{2rs}{a}} \Leftrightarrow Rs \geq a \cdot m_a$$

$$\Leftrightarrow \frac{abc}{4r} \geq a \cdot m_a \Leftrightarrow \frac{bc}{4r} \geq m_a$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2c^2}{16r^2} \geq m_a{}^2$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2 \geq 4r^2\left[2(b^2+c^2)-a^2\right]$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2 \geq 4\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\left[2(b^2+c^2)-a^2\right]$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2s - 4(s-a)(s-b)(s-c)\left[2(b^2+c^2)-a^2\right] \geq 0$$

Ponemos de nuevo $x = s-a$, $y = s-b$, $z = s-c$ y la última desigualdad se convierte en:

$$(x+z)^2(x+y)^2(x+y+z) - 4xyz\left[2(x+z)^2 + 2(x+y)^2 - (y+z)^2\right] \geq 0 \ .$$

Escribimos el primer miembro de la manera siguiente:

$$x(x+z)^2(x+y)^2 + y(x+z)^2(x+y)^2 + z(x+z)^2(x+y)^2$$
$$-4xyz(x+z)^2 - 4xyz(x+z)^2 - 4xyz(x+y)^2 - 4xyz(x+y)^2 + 4xyz(y+z)^2$$

y reagrupamos así:

$$y(x+y)^2\left[(x+z)^2 - 4xz\right] + z(x+z)^2\left[(x+y)^2 - 4xy\right] +$$
$$+ x\left[(x+z)^2(x+y)^2 - 4yz(x+z)^2 - 4yz(x+y)^2 + 4yz(y+z)^2\right]$$

esto es,

$$y(x+y)^2(x-z)^2 + z(x+z)^2(x-y)^2 +$$
$$+ x\left(x^4 + 2x^3y + 2x^3z + x^2y^2 + x^2z^2 - 4x^2yz - 6xy^2z - 6xyz^2 + 9y^2z^2\right)$$

y finalmente,

$$y(x+y)^2(x-z)^2 + z(x+z)^2(x-y)^2 + x\left(x^2 + xy + xz - 3yz\right)^2$$

que es ≥ 0.

Hay igualdad si y sólo si $x = y = z$, es decir, si y sólo si el triángulo es equilátero.

Está claro que $m_a \geq h_a$ y, por tanto, $\frac{m_a}{h_a} \geq 1$. Se concluye pues que $R \geq 2r$.

3. $R-2r\ge w_a-h_a$ (w_a es la longitud de la bisectriz interior del ángulo A)

Quedará demostrada si probamos que

$$R-2r\ge\sqrt{s(s-a)}-h_a$$

ya que $w_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}\le\sqrt{s(s-a)}$.

Expresamos las longitudes que figuran en (1) en función de R, $\frac{A}{2}$ i $\frac{B-C}{2}$. Tenemos:

$$\begin{aligned}h_a=b\cdot\sin C=2R\sin B\sin C&\\&=R(\cos(B-C)-\cos(B+C))\\&=R(\cos(B-C)+\cos A)\\&=R\left[\left(2\cos^2\frac{B-C}{2}-1\right)+\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)\right]\\&=2R\left(\cos^2\frac{B-C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R-2r&=R-8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\&=R\left(1-4\sin\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\\&=R\left[1-4\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)\right]\\&=R\left[1-4\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)\right]\\&=R\left(1-4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+4\sin^2\frac{A}{2}\right)\end{aligned}$$

i

$$\sqrt{s(s-a)}=\sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}=2R\sqrt{\sin B\sin C}\cos\frac{A}{2}=2R\cos\frac{A}{2}\sqrt{\cos^2\frac{B-C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}.$$

Si ponemos $\cos\frac{B-C}{2}=x$ y $\sin\frac{A}{2}=y$, resulta $1\ge x>y>0$ (x es mayor que y ya que $x-y=\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}=2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>0$) y la desigualdad (1) se escribe

$$2R\sqrt{1-y^2}\sqrt{x^2-y^2}\le R\left(1-4xy+4y^2\right)+2R\left(x^2-y^2\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$2\sqrt{1-y^2}\sqrt{x^2-y^2} \leq 1+2(x-y)^2$$

Ponemos $x-y=z$, observamos que $z>0$ y después de elevar al cuadrado obtenemos

$$\begin{aligned} & 4\left(1-y^2\right)(2y+z)z \leq 1+4z^2+4z^4 \\ \Leftrightarrow \quad & 8zy^3+4z^2y^2-8zy+4z^4+1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 4y^2(y-z)^2+8yz(y-z)^2+(4yz-1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

evidentemente cierta.

Hay igualdad si y sólo si $y=z=\frac{1}{2}$, si y sólo si el triángulo es equilátero.

Al ser, obviamente, $w_a \geq h_a$, tenemos $w_a-h_a \geq 0$ y concluímos que $R \geq 2r$.

4. $\dfrac{1}{R^2} \leq \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \leq \dfrac{1}{(2r)^2}$

A partir de la expresión $S = \dfrac{abc}{4R}$ para el área del triángulo y de la fórmula de Herón, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{R^2} &= \frac{16S^2}{a^2b^2c^2} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{a^2b^2c^2} \\
&= \frac{\left[(a+b)^2 - c^2\right]\left[c^2 - (a-b)^2\right]}{a^2b^2c^2} = \frac{\left(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab\right)\left(c^2 - a^2 - b^2 + 2ab\right)}{a^2b^2c^2} \\
&= \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - \left(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4 + c^4 - 2c^2a^2 + a^4\right)}{2a^2b^2c^2} \\
&= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{\left(a^2 - b^2\right)^2 + \left(b^2 - c^2\right)^2 + \left(c^2 - a^2\right)^2}{2a^2b^2c^2} \\
&\leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \ ,
\end{aligned}
$$

lo cual prueba la primera desigualdad.

Para la segunda, usamos la fórmula $S = \dfrac{a+b+c}{2} \cdot r$ junto con la de Herón y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2r)^2} &= \frac{(a+b+c)^2}{16S^2} = \frac{a+b+c}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \\
&= \frac{(a+b-c)+(a-b+c)+(-a+b+c)}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \\
&= \frac{1}{(a-b+c)(-a+b+c)} + \frac{1}{(a+b-c)(-a+b+c)} + \frac{1}{(a+b-c)(a-b+c)} \\
&= \frac{1}{c^2 - (a-b)^2} + \frac{1}{b^2 - (a-c)^2} + \frac{1}{c^2 - \left(b - c^2\right)} \\
&\geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \ .
\end{aligned}
$$

La desigualdad de Euler se deduce inmediatamente.

5. Si AA_1, BB_1 i CC_1 son las bisectrices interiores de un triángulo ABC $\left(A_1 \in \overline{BC}, B_1 \in \overline{CA}, C_1 \in \overline{AB}\right)$ y I es el incentro, entonces

$$8 \le \frac{AI}{IA_1} \cdot \frac{BI}{IB_1} \cdot \frac{CI}{IC_1} \le \frac{4R}{r}$$

El teorema de la bisectriz aplicado al triángulo ABA_1 en el cual $BA_1 = \frac{ac}{b+c}$ da

$$\frac{AI}{IA_1} = \frac{BA}{BA_1} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$$

y de la misma manera,

$$\frac{BI}{IB_1} = \frac{c+a}{b} \quad \text{i} \quad \frac{CI}{IC_1} = \frac{a+b}{c} \ .$$

La desigualtad propuesta equivale pues a la siguiente:

$$8 \le \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c} \le \frac{4R}{r}$$

La desigualdad de la izquierda, equivalente a $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$ se cumple para tres números positivos cualesquiera (no necesariamente han de ser las longitudes de los lados de un triángulo).

Para la desigualdad de la derecha, sustituímos

$$\frac{4R}{r} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

y resulta equivalente a

$$(a+b)(b+c)(c+a)(s-a)(s-b)(s-c) \le a^2b^2c^2$$

$$\Updownarrow$$

$$a^2b^2c^2 - (a+b)(b+c)(c+a)(s-a)(s-b)(s-c) \ge 0$$

Si ponemos $x = s-a$, $y = s-b$, $z = s-c$ esta última se escribe

$$(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2 - xyz(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z) \ge 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(x+y+z)\left[x^2y^2(x+y) + y^2z^2(y+z) + z^2x^2(z+x) - 2xyz(xy+yz+zx)\right] \ge 0$$

$\Leftrightarrow$

$$x^2y^2(x+y) + y^2z^2(y+z) + z^2x^2(z+x) - 2xyz(xy+yz+zx) \ge 0$$

cuyo primer miembro escribimos de la siguiente manera:

$$x\left(x^2y^2+z^2x^2\right)+y\left(y^2z^2+x^2y^2\right)+z\left(z^2x^2+y^2z^2\right)-2xyz(xy+yz+zx)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
&x(xy-zx)^2+2x^3yz+y(yz-xy)^2+2xy^3z+z(zx-yz)^2+2xyz^3-2xyz(xy+yz+zx)\\
&\qquad= x(xy-zx)^2+y(yz-xy)^2+z(zx-yz)^2+2xyz\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)\\
&\qquad= x^3(y-z)^2+y^3(z-x)^2+z^3(x-y)^2+xyz\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\\
&\qquad= \sum x\left(x^2+yz\right)(y-z)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Hay igualdad si y sólo si $x=y=z$, es decir, si y sólo si el triángulo es equilátero.

Tenemos pues la desigualdad $8\leq\frac{4R}{r}$, equivalente a la de Euler.

6. $\cos^2 \dfrac{B-C}{2} \geq \dfrac{2r}{R}$.

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{B-C}{2} &= \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\
&= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}+\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\\
&= \left(\frac{s}{a}+\frac{s-a}{a}\right)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\
&= \frac{b+c}{a}\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}
\end{aligned}
$$

por tanto, si designamos por S el área de ΔABC ,

$$
\begin{aligned}
\cos^2\frac{B-C}{2} &= \left(\frac{b+c}{a}\right)^2\frac{(s-b)(s-c)}{bc} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{sabc}\cdot\frac{(b+c)^2}{a(s-a)}\\
&= \frac{S^2}{sabc}\cdot\frac{(b+c)^2}{a(s-a)} = \frac{S}{s}\cdot\frac{4S}{abc}\cdot\frac{(b+c)^2}{4a(s-a)}\\
&= \frac{r}{R}\cdot\frac{(b+c)^2}{4a(s-a)}
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\cos^2\frac{B-C}{2}-\frac{2r}{R} &= \frac{r}{R}\cdot\frac{(b+c)^2}{4a(s-a)}-\frac{2r}{R}\\
&= \frac{r}{R}\cdot\left(\frac{(b+c)^2}{4a(s-a)}-2\right)\\
&= \frac{r}{R}\cdot\frac{(b+c)^2-8a(s-a)}{4a(s-a)}\\
&= \frac{r}{R}\cdot\frac{(b+c)^2-4a(-a+b+c)}{4a(s-a)}\\
&= \frac{r}{R}\cdot\frac{4a^2+b^2+c^2-4ab+2bc-4ca}{4a(s-a)}\\
&= \frac{r(2a-b-c)^2}{4aR(s-a)}\\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

Se verifica la igualdad $\cos^2\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{2r}{R}$ si y sólo si $2a=b+c$, si y sólo si las longitudes de los lados del triángulo están en progresión aritmética.

Siendo $1 \geq \cos^2 \frac{B-C}{2}$, resulta $1 \geq \frac{2r}{R}$ equivalente a la desigualdad de Euler.

Bibliografía

O. Bottema et al., Geometric Inequalities, Groningen, 1969.

DS Mitrinovic et al., Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluwer Ac. Publishers, The Netherlands, 1989.

L. Panaitopol, O inegalitate in triunghi, Gazeta Matematica (Bucarest), 106, (2001), 146-148.

Miguel Amengual Covas
miguel.amengual@correo.cop.es

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: